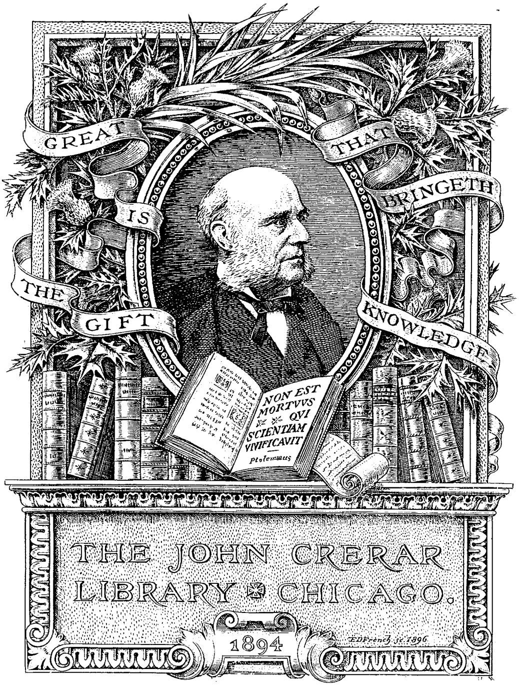
Dr. Joseph Carlebach

Lewi ben Gerson als Mathematiker

Verlag, Louis Lamm Berlin.


GREAT
IS
THE
GIFT
THAT
BRINGETH
KNOWLEDGE
NON EST
MORTVVS
QVI
SCIENTIAM
VIVIFICAVIT
Ptolemaeus
THE JOHN CRERAR
LIBRARY CHICAGO.
1894
E.D.French, sc. 1896.

Lewi ben Gerson
als Mathematiker
Ein Beitrag zur Geschichte der Mathematik bei den Juden.

von

Dr. phil. nat. Joseph Carlebach
Oberlehrer an der Margaretenschule in Berlin.

Leo Hebreus, vir insignis et celeber mathematicus, quasi veteribus parum fidens excogitavit novum instrumentum, cuius vidimus canones mathematica subtilitate praecellentes.
Pico: **Disputationes in Astrologiam.**

BERLIN 1910.
Louis Lamm.

Meinen lieben Eltern gewidmet.

Vorwort.

Die vorliegende Arbeit verfolgte ursprünglich ein doppeltes Ziel; einmal die bisher nur handschriftlich vorhandenen Werke Lewi ben Gersons zugänglich zu machen, ferner aber in zusammenhängender Darstellung Leben und Wirken des Erfinders der Dunkelkammer zu schildern. Die Fülle des bisher unedierten Materials zwang mich jedoch, von der Veröffentlichung seines astronomischen Hauptwerkes, des fünften Buches der „Kriege Gottes", abzusehen und mich auf die Bearbeitung der rein mathematischen Arbeiten Lewis zu beschränken. Soweit jedoch durch die Vorarbeiten anderer Lewis Leistungen für Astronomie und Instrumentenkunde bereits bekannt sind, wurden sie für die Biographie berücksichtigt.

Den Bibliotheksverwaltungen zu München und Basel für die wiederholte freundliche Ueberlassung von Handschriften, sowie Herrn Professor Dr. A. Berliner, durch dessen gütige Vermittelung ich eine Abschrift des Euklidkommentars aus London erhielt, Herrn Bibliothekar Dr. Stern für seine vielfache Unterstützung in der Beschaffung von literarischen Quellen dieser Arbeit, sowie Herrn Hofrat Professor Dr. Cantor zu Heidelberg für seine freundliche Aufmunterung zur Bearbeitung meines Themas erlaube ich mir, an dieser Stelle aufrichtigen Dank auszusprechen. Der Zunzstiftung endlich gebührt für die mir gewährte Subvention zur Drucklegung ebenfalls herzlicher Dank.

Berlin, im November 1908.

A.

Die Biographie Lewi ben Gersons.

Die den Worten des Textes beigefügten Zahlen beziehen sich auf die anliegenden Noten.

I.

Religionsphilosophie und Mathematik, Lewi's Wiedererweckung aus der Vergessenheit.

Quam studiorum viam, post Talmudicas collectiones, ingredi coepit judaica natio, eandem inde ad nostra vsque tempora plerumqué persequuta est. Quidquid enim ingenii in literarum doctrinas contulerunt Judeorum magistri, id fere totum, praetermissis atque neglectis reliquis studiorum generibus, nisi cabbalisticam philosophiam, tenebris inuolutam, excipias, in explicando illustrandoque Talmude consumpserunt, neque facile passi sunt ingenia suorum ceterarum artium lumine collustrari. Exstiterunt tamen, ut in omni gente fieri solet, qui, per recti iudicii impedimenta eluctati, multumque supra plebem eminentes, quemadmodum sidera, quae iter tenent mundo contrarium, aduersus omnium opinionem contenderent, et cum patrum eruditione linguarum notitiam, rerum mathematicarum cognitionem, et philosophicarum disciplinarum studium diligentissime coniungerent. Quo factum est, ut a seculo XII, in omnibus fere scientiis inuenirentur viri inter judeos docti, et in peregrina eruditione versatissimi, quorum nomina referre non nostrum sed eorum est, qui doctrinarum memoriam persequuntur.

Also urteilte G. F. Curts, der Dekan der philosophischen Fakultät der Universität Frankfurt a. O. anno 1765, als ihm ein Lehrbuch der elementaren Mathematik zur Zensur übergeben wurde.[1]) Dieses Urteil, obwohl zu einer Zeit ausgesprochen, wo an eine Geschichte der Wissenschaften, speziell der Mathematik kaum zu denken war, hat durch die umfassenden Forschungen der neueren Zeit, besonders durch die Arbeiten Steinschneiders über die Mathematik bei den Juden seine volle Bestätigung erfahren. Wenn auch Curts den Anteil der Juden an der allgemeinen Kultur älterer Epochen und den Bildungsstand der großen jüdischen Masse vielleicht unterschätzt, so ist es doch unbedingt richtig, daß hauptsächlich von den Zeiten des 12. Jahrhunderts an[2]) den Juden eine bedeutsame Rolle als Vermittlern und Förderern der Wissenschaften in Europa zukam. Vor allem in den exakten Disziplinen, in der Astronomie und allen Zweigen der damaligen Mathematik dankt man ihnen nicht nur eine erhaltende und überliefernde Tätigkeit, sondern auch manche selbständige Bereicherung des wissenschaftlichen Besitzstandes. Eine Reihe achtungsgebietender jüdischer Gelehrter mit universellen Kenntnissen, ein Ibn Esra, Maimonides, Abraham Judeus, Prophatius u. a. kennzeichnen diesen Zeitabschnitt.

Und merkwürdig, gerade die religiösen Studien, die nach der Ansicht des Frankfurter Dekans den Aufschwung der weltlichen Wissenschaften hemmten, waren wie uns scheint durch die Eigentümlichkeit des damaligen Geisteslebens die Haupttriebfeder zur Beschäftigung mit den mathematischen Wissensgebieten. Zunächst war es der jüdische Kalender, der als Ausgangspunkt für die Bestimmung der Feiertage ein nicht unwichtiges Thema religionswissenschaftlicher Forschung bildete, der aber auch zu allen Zeiten auf seine theoretische Berechtigung geprüft wurde, da er nach den Worten des Talmud (Sabbath 75a) „die Weisheit und Einsicht Israels in den Augen der Völker“ darstellen sollte.[3]) Seit dem Emporblühen der arabischen Kultur trat noch ein weiteres Motiv hinzu. Die an Aristoteles und die Neuplatoniker anknüpfende arabische Philosophie, aus der auch die religiösen Vorstellungen reiche Nahrung zogen, hatte die Sphären mit höheren, immateriellen, beseelten, engelähnlichen Wesen bevölkert, hatte die Gestirne zu Intelligenzen erhoben, die zwischen Gott und Menschen eine Mittelstufe einnehmen. Damit war die Astronomie, an die sich dann folgerichtig astrologische Gedankengänge anschlossen, in engste Verbindung mit der Religionsphilosophie getreten, die kosmische Welterkenntnis Sache und integrierender Bestandteil der religiösen Weltanschauung geworden. Das Studium der Gesetze der Himmelsbewegungen, das wiederum ohne tiefe mathematische Vorbereitungen undenkbar war, galt nicht nur als Forderung höherer wissenschaftlicher Bildung, vielmehr als elementare religiöse Pflicht. So beobachten wir die interessante Tatsache, daß Astronomie und ihre Schwesterwissenschaften zu einem Teilgebiet der Religionsphilosophie sich ausgestalten und in den ihr gewidmeten Werken einen breiten Raum einnehmen. So ist es verständlich, daß Maimonides' „Führer der Irrenden", „eine wahre Fundgrube für die Geschichte der Naturwissenschaften",[4]) in neun Kapiteln die astronomische Grundlage seiner Philosophie darlegt;[5]) daß der Karait Aron ben Elia in seiner Auseinandersetzung mit Maimonides auch über dessen astronomische Thesen eine Polemik führt;[6]) daß Jesaia ben Josef in den kabbalistischem Werk „Baum des Lebens" eine Rangordnung der Himmelssphären zu begründen sucht;[7]) daß endlich Meir al Dabi aus Toledo[8]) in den „Pfaden des Glaubens" auch alles Wissen der Astronomen und Kalenderkundigen in populärer Form vorzuführen gehalten ist.

In den Chorus dieser Religionsphilosophen gehört auch Lewi ben Gerson.[9]) In seinem Lebenswerke dem „Buch der Kriege Gottes", in dem er einen Ausgleich zwischen der zeitgenössischen Philosophie und den biblischen Traditionen herzustellen sucht, widmete er den umfangreichsten Abschnitt von 136 Kapiteln[10]) einer eingehenden Betrachtung der „Himmelskörper und was davon in dem Buche Almagest dargelegt worden ist“. Diese astronomische Abhandlung erregte damals ein solches Aufsehen, daß der Papst sich durch einen gelehrten Mönch in lateinischer Sprache einen Auszug des hebräischen Textes anfertigen ließ.[11]) Als jedoch das hebräische Original 1560 das erste Mal zum Druck gelangte, war das lebendige Interesse an den 200 Jahre früher weltbewegenden astronomischen Fragen erlahmt. Der Herausgeber ließ den bezüglichen Teil fort, mit der einfachen Begründung: Es gehöre nicht an diese Stelle eines religionphilosophischen Buches. So kamen die Leistungen Lewis auf astronomischem Gebiete, von denen gerade dieser Teil Zeugnis ablegen sollte, mehr und mehr in Vergessenheit. Wenn auch Munk, Joel und Steinschneider zur Vollendung seiner allgemeinen Chrakteristik auf seine Bedeutung als Astronom und Mathematiker hinwiesen, so konnte man ihren Darstellungen doch zu wenig positive Momente entnehmen, als daß die Geschichte der Wissenschaften von dem Namen des Gersonides Kenntnis zu nehmen Veranlassung gesehen hätte.

Durch eine merkwürdige Verkettung der Umstände wurde erst vor 20 Jahren der Astronom und Mathematiker Lewi wieder entdeckt. Die Geschichte dieser Entdeckung ist interessant genug, um hier kurz gestreift zu werden. Bekanntlich hat die eudoxische Lehre von den undurchdringlichen kristallnen Himmelssphären durch die berühmte Orts- und Parallaxenbestimmung der Kometen, die Regiomontan zu Nürnberg 1472 ausführte, einen entscheidenden Stoß bekommen. Diese denkwürdigen Beobachtungen waren teilweise durch ein Instrument ermöglicht worden,[12]) das seitdem zu größter Bedeutung und vielfacher Anwendung in der Astronomie gelangt ist, das auch auf die Entwicklung der Nautik einen entscheidenden Einfluß geübt hat, den baculus astronomicus, der neben vielen anderen Bezeichnungen seit Alters auch den Namen Jakobstab führt. Man glaubte nicht anders, als daß Regiomontan, der dem Instrument in Deutschland und Italien Verbreitung verschafft, als dessen Schüler der Kaufmann Martin Behaim den Gebrauch desselben den Portugiesen gelehrt hat,[13]) daß Regiomontan auch sein Erfinder sei,[14]) und die Forschungen Breusings schienen dieser Annahme Recht zu geben.[15]) Dennoch wurden an ihr mehr und mehr Zweifel laut; man fand bei zeitgenössischen Schriftstellern Bekanntschaft mit dem Gradstock, die unmöglich in Abhängigkeit von den Nürnberger Astronomen gestanden haben konnten.[16]) Enneström stellte daraufhin in seiner Zeitschrift die Frage, ob nicht der Name „Jakobstab“ vielleicht auf die richtige Fährte führe und zwar auf einen jüdischen Gelehrten als Erfinder hinweise.[17]) Steinschneider aber antwortete sehr geistreich, daß dieser Name wahrscheinlich aus der äußeren Aehnlichkeit des Gradstockes mit den in der Bibel beregten geschälten Stäben des Patriarchen Jakob sich herleite.[18]) Gleichzeitig, eigentlich mehr zufällig, wies er bei der Gelegenheit darauf hin, daß auch ein Lewi ben Gerson ein stabförmiges Instrument erfunden und mit einem Gedicht seine Erfindung gefeiert habe.

Hier wurde zum ersten Mal der Name Lewis in einer Zeitschrift für Geschichte der Mathematik genannt. Inzwischen erschien ein Register der Manuskripte, die sich in Regiomontans Bibliothek vorgefunden hatten; unter ihnen die lateinische Uebersetzung einer astronomischen Arbeit Lewis.[19]) Dieser Mitteilung in Verbindung mit der Notiz Steinschneiders nachgehend, fand Günther[20]) ein lateinisches Manuskript in der Münchener Bibliothek, eine Kopie jenes für Clemens VI. angefertigten Auszuges, und es zeigte sich das überraschende Resultat, daß dem Gersonides der Ruhm der strittigen Erfindung gebühre. Dem weiteren Inhalt dieser Schrift ging Günther nicht nach. Wieder verflossen 10 Jahre, bis sie M. Curtze einer erneuten Durchsicht unterzog, um eine Fülle neuer historischer Funde zu machen.[21]) Eine selbständige, vollkommen ausgebildete Trigonometrie zeigte Lewi auf der Höhe mathematischen Könnens; ein großes astronomisches Beobachtungsmaterial, in dem er, ein Meister der Instrumentaltechnik, die Theorie und Daten des Ptolemäus einer exakten Prüfung unterzog, machten ihn nicht unwert, ein Vorläufer des Copernicus zu heißen; endlich zeigte sich, daß Lewi mit der Konstruktion der camera obscura dem Lionardo da Vinci und Porta um 200 Jahre zuvorgekommen war. Mit einem Schlage ist damit Gersonides in die Reihe der hervorragendsten Gelehrten des ganzen Mittelalters gerückt, dessen Namen die Geschichte nicht mit Stillschweigen übergehen kann. Daher dürfte eine nähere Schilderung der Persönlichkeit und Lebensschicksale dieses jüdischen Denkers nicht unwillkommen sein, daher dürften auch seine übrigen mathematisch-astronomischen Arbeiten Interesse beanspruchen, selbst wenn sie an wissenschaftlicher Bedeutung dem Hauptwerk nicht gleichkommen sollten.

II.

Zeitumstände, Heimat.

1288 ist Leo[1]) in der Provence geboren. Zeit und Ort seiner Geburt waren für seine geistige Entwicklung von nicht geringer Bedeutung. Es war die Zeit der zu Ende gehenden Blüteperiode, die den Juden in den südwestlichen Ländern Europas beschieden war, die Zeit ihrer höchsten politischen und intellektuellen Selbstentfaltung, eine Zeit regsten geistigen Lebens. Leben aber heißt Kampf, und so war es für sie eine Zeit auch der größten geistigen Kämpfe, Durch die enge Berührung mit der arabischen Kultur sahen sich ihre Gebildeten vor die Notwendigkeit gestellt, sich mit der herrschenden Zeitphilosophie auseinanderzusetzen. Maimonides, gleich souverän in der Beherrschung der zeitgenössischen Kultur wie in dem religiösen Schrifttum der Juden, gleich groß im Talmud wie als Astronom, Mathematiker und Philosoph, machte im „Moreh Newuchim“ den großangelegten Versuch, die widerstreitenden Autoritäten, die Bibel, Aristoteles und Ptolemäus in Einklang zu bringen;[2]) das ging natürlich nicht ohne eine große hermeneutische Freiheit dem Schriftwort gegenüber und mußte bei denen heftigen Widerspruch erwecken, die instinktiv fühlten, daß mit den griechischen Anschauungen ein fremdes Element künstlich in die Bibel hineingetragen würde.[3]) Dieser Kampf zwischen Philosophie und religiöser Tradition, zwischen freier und geschichtlicher Auffassung der Bibel setzte die Gemüter in leidenschaftlichste Erregung, spaltete die Judenheit in zwei Parteien und die Gemeinden in zwei Lager, die sich mit allen redlichen und unredlichen Waffen, offen und insgeheim, in Volksversammlungen und in Sendschreiben, mit Bann und Gegenbann, ja mit tätlichen Ausschreitungen und mit Anrufung der kirchlichen Gewalt als Schiedsrichterin befehdeten. Die politischen Verhältnisse zwangen wohl die Kämpfenden hier zum Waffenstillstand, dort zum Friedensschluß; für eine Weile schien es sogar, als hätten die unglücklichen Folgen der religiösen Zwiste eine endgültige Versöhnung der Gemüter bewirkt. Als aber vier Jahrzehnte nach Maimonides' Tode Epigonen, ein Falaquera, Isaak Albalag, Levi von Villefranche halb dilettantenhaft und enzyklopädistisch eine aufklärerische Literatur erzeugten und verbreiteten, erwachte von neuem so heftig die Erbitterung gegen die „Maimonisten“, daß von einer der größten rabbinischen Autoritäten, von Salomo ben Adret 1305 ein Verbot erging, vor dem 25. Lebensjahre sich mit philosophischer Spekulation zu befassen.[4]) In diese reichbewegte Zeit fällt Leos Jugend.

Aber auch sein Heimatland, in dem er Zeit seines Lebens verblieb, war für seine Entwicklung ein günstiger Boden. Anfangs stand es unter der Herrschaft der Herzöge von Anjou, bildungsfreundlicher Regenten, die den

Juden Wohlwollen entgegenbrachten und sie zu ihren literarischen Unternehmungen heranzogen.[5]) Als später die Vaterstadt Leos in päpstlichen Besitz überging, fanden die Juden auch in ihnen milde Herrscher und Beschützer. Wie sie von den politischen Wirren und den fanatischen Glaubenverfolgungen verschont blieben, unter denen ihre Brüder in Südspanien und Nordfrankreich litten, so nahm auch dort in der Provenze der Kampf um die Tradition nicht die häßlichen Formen an, die er anderswo zeitigte. Hier hatte Maimonides fast ohne Kampf sich Anerkennung errungen, war daher durch seine Schriften der Anstoß zu allseitiger Forschung, zu lebhafter Gelehrtentätigkeit geworden. Ein geistiger Hochstand, ein wissenschaftliches Leben ganz eigener Art bildete sich heraus. Und nicht zum Mindesten auf mathematisch-astronomischem Gebiet. Das wachsende Bedürfnis nach intensiver Bildung und Anteilnahme an den kulturellen Bestrebungen, der Wunsch, alle Quellen des Wissens zu erschließen und weiteren Schichten zugänglich zu machen, hatte dort eine erstaunliche Uebersetzertätigkeit im Gefolge.[6]) Um uns auf das uns interessierende Gebiet zu beschränken, hatten binnen 50 Jahren Moses Ibn Tibbon, Jakob Ibn Machir, der berühmte Erfinder des quadrans judaicus, und vor allem Kalonymus alle die Hauptschriften, aus denen das Mittelalter schöpfte, ins Hebräische übersetzt. Der erstere hatte[7]) um 1260 die erste Übersetzung des Euklid mitsamt den Kommentaren des Al-Farabi und Ibn Heitham, sowie die astronomischen Werke Dschabirs und des Alpetragius geliefert, der zweite um 1270 von neuem die gleichen Schriften bearbeitet, der Dritte im Beginn des 14. Jahrhunderts die des Ptolemäus, des Thabit Ibn Kurra und viele andere übersetzt. Ebenso waren zu gleicher Zeit die Schriften der arabischen Philosophen, die Abhandlung der lauteren Brüder, des Averroes und Ibn Sina erschlossen wurden. „Wir sehen, so charakterisiert Leo selbst seine Zeit, daß die vollkommenen

Wissenschaften sich unter allen Nationen ausbreiten, wie die des Aristoteles, des Gallen, des Ptolemäus; denn infolge des dem Menschen von der Natur eingepflanzten Strebens nach Weisheit — die ja sein Glück ist und seine Vollkommenheit — bemüht man sich, jene Wissenschaften in andere Sprachen zu übersetzen (Milchamoth 6, 1,15)".

Diese Uebersetzertätigkeit kann kein Zufall sein, sie deutet auf eine geistige Regsamkeit, auf ein Bildungsniveau ersten Ranges. Das Hebräische war in begrenztem Umfange eine Kultursprache geworden, die es ermöglichte, in ihrem Bereich in den Vollbesitz des damaligen Wissens zu gelangen; dies erregt umsomehr unsere Verwunderung, als noch um 1250 Abulafia hatte sagen dürfen, das „nichts von Mathematik ins Hebräische übersetzt sei".[8]) Wir heben dieses Faktum hervor, denn nur dadurch wird der Bildungsgang Lewis verständlich. Es läßt sich der Nachweis erbringen,[9]) daß Lewi des Lateinischen unkundig war, daß er von dem Arabischen nur ganz unbedeutende Kenntnisse hatte. Außer dem Landesidiom, dem Provenzalischen, kannte er keine fremde Sprache; schriftstellerisch handhabte er allein das Hebräische. Nur aus dem Reichtum der damaligen hebäischen Literatur, die sich auch die Schätze fremder Zungen zu eigen gemacht hatte, läßt es sich begreifen, wenn er dennoch imstande war, die Bildung seiner Zeit im Ganzen und Großen zu umfassen und an ihrer Erweiterung tätig mitzuarbeiten.

III.

Lewis geistiger Entwicklungsgang und literarische Laufbahn.

Leo entstammt einer angesehenen Gelehrtenfamilie; schon sein Vater und Großvater hatten sich durch eigene literarische Produktion auch auf astronomischem Gebiet hervorgetan.[1]) Aus ihrer Hand empfängt Leo den Jugendunterricht. Harmonisch erschließen sich ihm die verschiedene Kreise der Bildung, die religiöse in Bibel und Talmud, die philosophische vor allem in Aristoteles und Averroes, die mathematische in all den oben erwähnten Uebersetzungen. Nachhaltigsten Einfluß üben auf ihn Ibn Esras[2]), Abraham bar Chijahs und des Maimonides[3]) Schriften aus; dankbar bekennt er sich als Jünger dieser Meister und gesteht, durch sie, wenn auch nicht seine eigentlichen Lebensansichten, so doch seine Geistesrichtung und reichste Anregung erhalten zu haben. „Es gebührt mir, unverkürzten Dank meinen Vorgängern zu geben, und wenn auch meine Worte weit, gar weit davon verschieden erfunden werden, was hier der „Führer" und der Gelehrte Rabbi Abraham gedacht hatten, so waren sie doch gewissermaßen die Ursache, mich zur Wahrheit hinzuführen."[4])

Während es draußen den kämpfenden Parteien zwischen maimunischer Philosophie und dem Talmud keine Vermittlung, keine Brücke zu geben scheint, ordnen sich in Leos Geiste die verschiedenartigen Bildungselemente friedlich nebeneinander. Durch die Vielseitigkeit und Freiheit dieser seiner Erziehung war Leo einer jener Bevorzugten, denen nie das Joch drückender, starrer Autoritäten fühlbar wurde, welche die Würde der eigenen Vernunft und des eigenen Urteils nicht erst nach heißem innerem Ringen zur Geltung zu bringen brauchten.[5]) Hatte Maimonides nur im Gegensatz zu all seinen Vorgängern seine Philosophie in die Bibel hineininterpretiert, so lernte Leo von vorn herein die Schrift im Lichte eines freieren Rationalismus auffassen. Gehörte bei jenem ein großer Mut dazu, dem Aristoteles die letzte Entscheidung in gewissen religiösen Fragen streitig zu machen[6]), so war für diesen von vorne herein die Autorität des Griechen keine absolute, sondern der höheren Instanz der Vernunft unterworfen. Nimmt man hinzu, daß auch auf astronomischem Gebiet er von Jugend auf gewahren mußte, wie selbst an ein so großartiges, geometrisch konsequent durchgeführtes System wie das des Ptolemäus leise Zweifel sich heranwagten, wie Maimonides z. B. aus den aristotelischen Bewegungsgesetzen dessen mechanische Unhaltbarkeit deduzierte[7]), wie so manche Beobachtung späterer Astronomen sich den Konsequenzen jener Theorie nicht fügen wollte, so wird der köstliche Freimut verständlich, mit dem Gersonides an jedes Problem, an jede Ueberlieferung herantritt und sie der kritischen Nachprüfung unterzieht.

Ueber sein Leben selbst, soweit es uns bekannt ist, ist wenig zu berichten. Er führte ein stilles Gelehrtendasein, den mannigfachsten Studien hingegeben. Wir finden ihn in verschiedenen Städten der Provence, in Perpignan, in Orange und Bagnols; meist aber weilte er in Avignon, der Residenz der von Rom exilierten Päpste, in denen er edelmütige Mäcene fand und denen er vermutlich Dienste als Astronom und Astrolog leistete.[8]) Der päpstlichen Macht hatte er es zu danken, wenn der blutige Glaubenshaß, der damals in Frankreich unzählige Opfer forderte, an seiner nächsten Umgebung vorüberging,[9]) wenn er sich literarischer Muße freuen durfte, als die Juden der Nachbarländer zum Wanderstab greifen mußten. Er muß sich sehr früh als Astronom einen Namen gemacht haben; kaum 30 Jahre alt, ergeht an ihn von hoher Seite der Auftrag, seine astronomischen Beobachtungen zu einem Tabellenwerk zusammenzufassen.[10]) Ein Jahr vorher war er mit der ersten Schrift über den logischen Schluß an die Oeffentlichkeit getreten, worin er die ungenauen Schlußfolgerungen, welche Averroes dem Aristoteles in seinem Kommentar zu den Analytica zuschreibt, prüft und berichtigt.[11]) Von da an entfaltete er eine ungemein fruchtbare, vielseitige literarische Tätigkeit. 1321 erscheint ein stattliches Lehrbuch der Arithmetik der „Maasse-Choscheb“, die er aus dem Zustand einer technischen Fertigkeit zu einer Wissenschaft erheben will, eine Aufgabe, die er mit schönstem Erfolge löst. Dann unternimmt er es, die Werke des Averroes, des geachtetsten Philosophen der damaligen Zeit, zu kommentieren und häufig in „rücksichtslosen Glossen“[12]) ohne Scheu seine abweichende Meinung diesem gegenüber zum Ausdruck zu bringen. Diese Kommentare führen ihn zugleich zur Durchforschung des ganzen physikalischen und zoologischen Wissens seiner Zeit: so der Traktat über Physik, Werden und Vergehen, de coelo, die Materie, Tiere und Pflanzen, die Metereologie und die „Himmelszeichen“.[13]) Bis zum Jahre 1329 arbeitet er dann an seinem Hauptwerk, dem „Sefer Milchamoth“. Ursprünglich beabsichtigt er nur dem Maimonides in Bezug auf seine Ansicht von der Erschaffung der Materie entgegentzutreten. Dieser hatte nämlich trotz der vermeintlichen philosophischen Schwierigkeit, aus einem rein geistigen Wesen wie Gott die Hyle emaniert zu denken, dennoch die Ewigkeit der Materie bestritten, weil er sonst das Eingreifen Gottes in die Natur, die Wunder, kurz die biblische Weltauffassung nicht aufrecht halten konnte. Demgegenüber wollte Leo die Lehre von der Koärternität der Materie mit Gott, allerdings, in Uebereinstimmung mit der Ansicht des Avicenna, als völlig undefinerten, eigenschaftslosen Stoffes, als verträglich mit der mosaischen Kosmogenie verfechten.[14]) Es zeigte sich aber, daß er dazu ganz allgemein seine metaphysischen Anschauungen auseinandersetzen müsse, sollte anders seine Theorie nicht ein Bruchstück bleiben.[15]) So gestaltete sich dieses Werk zu einem großen Glaubensbekenntnis aus, an das er die Summe seines Wissens und Könnens setzt. Dann geht er an die systematische Erklärung der Bibel. Schon in früheren Werken hatte er sich häufig in der Exegese versucht, aber mehr zu apologetischem Zwecke, um seine Meinung gegen Angriffe von Seiten der Bibelkenner zu rechtfertigen. Jetzt beginnt er die ganze Schrift von der hohen Warte seines Wissens, seiner philosophischen und exakt wissenschaftlichen Bildung aus zu kommentieren, nicht sowohl, um sie nach der sprachlichen und grammatischen Seite zu ergründen, sondern um den Reichtum der in ihr enthaltenen religiösen, ethischen und allgemeinen Belehrung, „ihren Nutzen für den Charakter, für die Gebote und für die Erkenntnis“ aufzuweisen.[16]) In späten Jahren schreibt er eine Einleitung zu den ersten 5 Büchern des Euklid, ja es scheint, als habe er eine große Komposition, eine Zusammenfassung seiner elementargeometrischen Kenntnisse zu schaffen beabsichtigt.[17]) Diese Werke sind die Marksteine seines Lebensganges.

Es kann nun natürlich nicht unsere Aufgabe sein, eine erschöpfende Charakteristik dieser schriftstellerischen Leistungen zu geben. Nur so weit sie zur Mathematik und den Naturwissenschaften in Beziehung stehen, können sie uns interessieren. Jedoch eine kurze Schilderung seiner Persönlichkeit, wie sie sich uns nach dem Studium seiner Werke, besondes in der Einleitung zu „Sefer Milchamoth“ darstellt, mag hier noch eine Stelle finden.

IV.

Charakteristik seiner Persönlichkeit.

Wir haben oben den Freimut Leos bei der Behandlung wissenschaftlicher Fragen hervorgehoben. In der Tat, sein subjektives aufrichtigstes Bestreben geht dahin, sich frei von allen Voraussetzungen, frei von der Bevormundung durch irgend eine Autorität zu machen. Nur und lediglich das reine Denken soll die richterliche Instanz in Fragen der Wissenschaft bilden, und an keiner Stelle macht er aus dieser Grundüberzeugung einen Hehl: „Würde die Spekulation uns zu einem Resultat führen, daß aus dem einfachen Wortsinn der Thora nicht hervorzugehen scheint, so hätten wir dennoch kein Bedenken, die Wahrheit auszusprechen; denn das steht nicht mit der biblischen Sittenlehre in Widerspruch, die uns nicht gebieten kann, das Falsche zu glauben."[1])

Und doch irrt man, wenn man ihn auf Grund dieses Freimuts für einen Stürmer und Dränger hält, ja nur für einen zur Skepsis und Kritik neigenden Denker. Ganz im Gegenteil: Leo ist eine nüchterne, phlegmatische Natur; nüchtern und ohne Feuer wie sein Stil ist seine Lehr- und Betrachtungsweise. Er ist auch viel zu sehr Wirklichkeitsphilosoph, der auf die Beobachtung der sich ihm darbietenden Tatsachen ausgeht,[2]) der sich dem Gegebenen, Wirklichen unterwirft, der daher in vieler Hinsicht ganz Kind seiner Zeit bleibt und von dem mystischen Einschlag ihres Denkens sich gar nicht zu emanzipieren versucht. Er glaubt an Träume und will deren Macht an sich selbst erprobt haben;[3]) er übernimmt den gesamten astrologischen Irrwahn des Ibn Esra, eben weil er darin ein absolutes Faktum erblickt wie in den Tatsachen der Sinneserfahrung. Leo will nur verstehen und erklären, „er ist Exeget in seiner Philosophie, wie Philosoph in seiner Exegese."[4]) Nie wird man bei ihm einen historischen Bericht, eine vermeintlich allgemeine Erfahrung bestritten finden; die Wunder z. B. sind für ihn eine unantastbare Tatsache, weil sie in der Bibel bezeugt sind. Nur in der Art und Weise, wie er sich die Dinge ursächlich erklärt, wie er sie dem Ganzen seiner philosophisch-naturwissenschaftlichen Anschauungen einfügt, dadurch unterschied er sich von Andern; das bildet seine spezifische Eigenart.

Leo sieht sich bei fast allen seinen Forschungen zur Kritik und Bekämpfung seiner Vorgänger gedrängt; aber obwohl er die Erfahrung macht, daß „bei seinen Untersuchungen ihm die Angaben der alten Gelehrten mehr zum Hindernis als zur Förderung gereichten",[5]) so entschließt er sich, im Gefühl ehrfürchtiger Bewunderung für ihre Größe, nur im äußersten Falle die ihn überkommene Meinung anzutasten. Warnend stellt er seiner kritischen Darstellung von Ptolemeus Lehre die Worte voran: „Wir wollen den zukünftigen Geschlechtern die Anweisung geben, daß sie der Früheren Meinungen niemals ohne die größte Vorsicht und vielfache experimentelle Prüfung entgegentreten und nicht von ihr abweichen, außer wo sie nicht anders können.“[6]) Vor dem Eintritt in jegliche Untersuchung, die ihm mit seinen Lehrmeistern in Widerspruch setzen konnte, verwahrt er sich dagegen, daß er in mutwilliger Auflehnung und dünkelhafter Anmaßung sich auf das Problem einlasse. Nicht, weil er sich weiser dünkt als seine Vorgänger, sondern weil er auf ihren Schultern stehend, weiter als sie blicken könne, darf er ihnen widersprechen und seiner Ansicht größeren Wert beilegen, „denn die Zeit fördert das Auffinden der Wahrheit“.[7])

In dieser geistigen Veranlagung liegt auch Leos Forschermethode begründet. Erst läßt er alle seine Vorgänger zu Worte kommen, sucht deren Ansichten zu erfassen und verständlich zu machen und gegeneinander abzuwiegen, um sich dann für eine derselben zu entscheiden, oder sie leise modifiziert als richtig anzuerkennen. Selten, daß er sich in direkten Gegensatz zu allen bisher geäußerten Theorien setzt; ihm liegt nichts ferner, als ein kühner Neuerer sein zu wollen.

Und weil er nicht in jugendlichem Uebermut, sondern mit der Bescheidenheit und Zurückhaltung eines Gelehrten vorgeht, darum setzt er sich in innerer Vornehmheit und Ruhe über den blinden Eifer selbstgerechter Fanatiker, „der nicht aufgehört hat und nicht aufhören wird,“[8]) hinweg. Wo reine, naive Religiosität sich freiwillig und innig der Tradition unterwirft, da will auch er das reine Gefühl nicht stören.[9]) Doch dem, der sich im Kampfe der Geister seine Ueberzeugung erringen will, dem und nur dem will er Wegweiser sein und darin soll keine Menschenfurcht ihn hemmen. Schon als er mit seiner Erstlingsarbeit sich an eine Kritik aristotelischer Syllogismen heranwagte, ist er sich vollbewußt, daß man ihn dafür anmaßend nennen wird;[10]) das darf ihn aber nicht hindern, da sein Buch vielleicht von Nutzen sein kann. Denn es ist ihm eine heilige Pflicht, gewonnene Kenntnisse mitzuteilen; denn höhere Erkenntnis ist nach seiner Meinung höhere Glückseligkeit, und wer sie egoistisch für sich zurückhält, raubt der Mitwelt den Fortschritt ihres inneren Glückes. Wie Gott allen aus reiner Liebe nützt und wohltut, so soll jeder die Mitwelt zur eigenen Stufe der Vollkommenheit emporheben.[11])

Wer aber des Adels der Wissenschaft teilhaftig werden will, der mühe sich darum, der scheue nicht die Vertiefung in alle Gebiete des Wissens, scheue die Anstrengung einer schweren Untersuchung nicht. Alsdann wird ihm auch höhere Erkenntnis nicht schaden, wenn sie gleich der großen Menge Gefahr beut. Darum verlangt Leo, daß man vor der Lektüre seines Werkes Mathematik, Physik und Philosophie studiere, darum verschmäht er es elegant, gefällig und leicht den Worten wie dem Inhalt nach zu schreiben. „Bei Gott, es ist die Absicht des Verfassers, seine Worte vor der Menge zu verbergen, damit nur einzelne sie verstehen und sie nicht bei jener Schaden stiften könne."[12]) Aber dennoch hülle er sich nicht künstlich in einen Schleier dunkler, geheimnisvoller Rede, sondern sei bestrebt, die Untersuchung sachlich, klar und systematisch zu führen. „Deshalb keine poetischen Wendungen, keine tiefgründigen Ausdrücke! Genug mit der Tiefe der Gedanken!" So verzichtet Leo, ein aristokratischer Denker, von vorne herein auf eine billige Popularität.

Ueberblicken wir abschließend die Ideenwelt und wissenschaftliche Eigenart Leos, so werden wir darin die merkwürdigsten Gegensätze gepaart finden. Er bekennt sich als absoluten Rationalisten. Nach seiner Ansicht braucht der Menschengeist vor keinem Problem, als jenseits seiner Schranken liegend, Halt zu machen;

wenn z. B. Maimonides die Frage der Vereinbarkeit des Vorauswissens Gottes mit der menschlichen Willensfreiheit für den endlichen Verstand als unlösbar und daher außerhalb der philosophischen Diskussionen stehend hält,[13]) beschränkt Leo lieber das göttliche Wissen nur auf die allgemeine Ordnung der Dinge, als daß die individuelle Selbstbestimmung für ihn unerklärlich bleiben soll.[14]) Aber dennoch war er durchaus gläubig und legte stets den höchsten Wert darauf, mit der Bibel, in deren Auslegung er allerdings unbegrenztes Deutungsrecht für sich in Anspruch nahm, im genausten Einklang zu bleiben.[15]) Als Theologe, in der Auffassung der religiösen Grundwahrheiten ist er viel kühner als Maimonides; als aufgeklärter, vorurteilfreier Denker steht er mit seinem philosophischen Eklekticismus, der sich selbst zur Anerkennung aller Wahnvorstellungen seiner Zeit verstand, viel tiefer als jener. Die geometrischen Axiome, die Euklid als keines Beweises fähig und bedürftig, seinem Buche apodiktisch voranstellt, will Leo als solche nicht gelten lassen und unternimmt es, sie zu „beweisen“;[16]) aber die Voraussetzungen der Astrologie stellt er als unanfechtbare Grundsätze hin, „die niemand bezweifeln könnte“.[17]) So widerspruchsvoll aber auch seine Anschauungen erscheinen mögen, seine Persönlichkeit als Mensch steht in sich geschlossen und harmonisch vor unseren Augen. Eine unerschöpfliche Liebe zur Wissenschaft, ein steter Drang nach Erkenntnis und innerer Vervollkommnung zeichnet ihn aus und verleiht ihm die zur astronomischen Untersuchung nötige Geduld und Ausdauer. Im Studium findet er die Ruhe seines Innern und Trost in den Leiden, die spätere Jahre ihm brachten.

V.

Leistungen für die Astronomie.

a) Der Jakobstab.

Die Bedeutung Leos wie jener ganzen Epoche zwischen Ptolemäus und dem Beginn der Neuzeit für die

Geschichte der Astronomie liegt nicht in der Konzeption großer Ideen. Das war dem Geiste der Araber, die der damaligen Kulturwelt ihren Stempel aufdrückten, nicht gegeben. Von der ptolemäischen Lehre, so sehr sie im Fortschritt der Zeiten ihre zunehmende Komplikation erkannten, vermochten sie sich nicht zu befreien. Aber dafür haben sie die astronomische Technik, die Beobachtungskunst und das Beobachtungsmaterial, kurz das Handwerkszeug, mit dem später die Theorie des Weltgebäudes aufgebaut werden sollte, bedeutend gemehrt und gefördert. In der Arbeit vieler Generationen haben sie die Veränderungen der astronomischen Daten immer genauer studiert und gemessen. In diesem Sinne bilden sie immerhin eine nicht unbedeutende Vorstufe der großen Renaissance der Astronomie; von diesem Standpunkt aus muß auch Levis astronomische Tätigkeit gewürdigt werden.[1])

Beginnen wir mit der Leistung, der er seine Wiedererweckung aus der Vergessenheit verdankt, dem Bakulus. Es ist dies ein Instrument zur Messung von Sehwinkeln, von sphärischen und terrestrischen Distanzen, in seiner einfachsten Form ein graduierter Stab von rechteckigem Querschnitt, auf dem eine durchbohrte Platte hin und her geschoben werden kann. Bringt man das Auge an das eine Stabende a, verschiebt die Platte solange, bis die Endpunkte der zu messenden Länge AB für das Auge durch jene verdeckt sind, so kann aus der bekannten Höhe h der Platte und ihrem auf dem Stabe abgelesenen Abstand c vom Auge die gesuchte Distanz nach leichter Formel gefunden werden.[2]) (Siehe Fig. 1.)

Das Prinzip dieses Instruments ist, wie man sieht, von überraschender Einfachheit.[3]) Es ist das Ei des Columbus. Tausende haben vor Leo die Erfahrung gemacht, daß man beim Visieren mit der Hand oder dem Finger stets eine bestimmte Einstellung finden kann, so daß der anvisierte Gegenstand durch sie verdeckt wird.

Leo benutzt diese alltägliche Erfahrung, indem er nur dafür Sorge trägt, daß die Einstellung auch gemessen werden kann. Für ihn mußte sich der Gedanke an die Nutzbarmachung jener Tatsache umso eher aufdrängen, als ihm, wie wir sehen werden, infolge seiner gründlichen Kenntnisse der Trigonometrie der Zusammenhang der gesuchten Sehweite mit den Messungsdaten ohne weiteres einleuchten mußte. Er selbst ist von der Einfachheit seines Stabes überrascht. Kein Dreistab, kein Quadrant, kein Astrolab, nein, ein Stock, ein Stab sollte es ermöglichen, die Gestirne der Beobachtung zugänglich zu machen! Diese auffallende Verwendbarkeit des Stockes scheint dem nüchternen Denker der poetischen Verherrlichung wert, und er legt jenem folgende Worte in den Mund:

Der Stock an die Menschen.[4])

„Schmerzensbringer heißt Ihr mich," klagt der Stock in bitt'rem Zorn,
„War ich für die Menscheit nicht stets des reichsten Segens Born?[5])
Jetzo sproß aus Davids Stamm wiederum ein duftend Reis.[6])
Des ich laut mich rühmen darf, künde selbst euch meinen Preis.
Ich, ich schaffe Zucht und Sitte, zwing' den Schüler, daß er lerne,
Stütze, wenn er müde wanket, ihn, den Wanderer, in der Ferne,
Leite ihn durch Dunkelheit, daß den Pfad er nicht verliere,
Ueber unwegsamen Sumpf ich in Sicherheit ihn führe.
Für den Blinden bin das Auge, für den Lahmen ich der Fuß,
Manchem starkes Wehr und Waffen, der mit vielen kämpfen muß.
Immer werd' ich mich erneuen, selbst vom Baume losgerissen,
Werden junge Reiser doch grünend meinem Stamm entsprießen.
Irre ging der Menschengeist wohl an meiner Wundermacht,
Und gleich einem Gotte hat man mir Verehrung dargebracht.[7])
Bei des Tempels Wanderungen lieh ich meine Hilfe dar,[8])
Mit dem Opfer stieg empor ich auf den Stufen zum Altar.[9])

Wunder habe ich gewirkt vor der Pharaonen Thron;
Wär' nicht ich, so hätte Laban nie bezahlet Jakobs Lohn.[10])
Ja, es schaut der Mensch durch mich zu den Sternen in den Höhen,
Und des Himmels hehre Tore kann sein Auge offen sehen.
Er erkennt der Sphären Bildung, Sonn' und Mond in ihrer Bahn,
Legt ans weite Firmament kühn der Messung Kette an."

Leo bleibt bei der bloßen Konzeption des Instruments, die ihm vielleicht eine glückliche Stunde eingegeben hatte, nicht stehen. Wie ein echter Experimentator versucht er, seinen Gradstock zum Präzisionsinstrument auszubilden und die ihm anhaftenden Fehlerquellen möglichst zu eliminieren, um dadurch seine Verwendbarkeit für verschiedene Beobachtungen zu erhöhen. Da ersinnt er zunächst eine sehr geistreiche Vorrichtung, eine Art Nonius, um eine genaue Ablesung von Primen (Minuten) zu ermöglichen (Siehe Figur 3.) Dazu bringt er eine bis auf ein zwölftel Grad genaue Teilung an, teilt ferner seinen Stab der Breite nach in 5 gleiche Streifen und verbindet jeden graden Teilstrich (2, 4 . . . . .) auf der obersten Begrenzungslinie mit einem ungraden (1, 3, . .) auf der untersten durch Tranversallinien und findet aus dem Schnittpunkt der Längs- und Querlinien die Angabe der Minuten. Zweitens: Damit das Auge auch genau dem Stabe anliege, bringt er an dem Okularende eine mit Ausbuchtungen versehene Tafel, eine tabula cornuta an, die genau in den Augenwinkel passend Auge und Instrument in konstanter Stellung zueinander hält.[11]) Eine weitere Fehlerquelle erkennt Leo darin, daß die Sehstrahlen nicht, wie bei der Ableitung der Formel voraus gesetzt war, im Stabende sich schneiden, sondern im Innern des Auges selbst,[12]) in der humiditas congelata, wo die visiva potentia ihren Sitz haben soll. Durch zahlreiche (blinde) Versuche stellt Leo fest, daß man die auf dem Stab am Augende abgetragene erste Palme[13]) — die ganze Stablänge faßt deren 4 — um $^1/_{19}$ verkleinern muß, um ein richtiges Resultat zu erhalten.

Die weitere Ausgestaltung, die er seiner Erfindung leiht, knüpft an deren spezielle Anwendungen an. Unerschöpflich ist er darin, für jede derselben dem Instrumente eine neue geeignete Form zu geben. Will man nur den Kreisbogen zwischen zwei Sternen messen, so genügt es, den Stab in freier Hand zu halten; je nachdem dann beide Sterne in der Ekliptik oder der eine außerhalb derselben, der andere in ihr sich befinden, erhält man ihre Längendistanz oder die Breite des Sterns; sind beide außerhalb des Zodiakus und kennt man die Breite des einen, so ist die des andern gleich der Summe der Distanz plus erster Breite, wenn beide auf derselben Seite der Ekliptik, dagegen gleich ihrer Differenz, wenn sie durch jene von einander getrennt sind. Will man jedoch die Meridianhöhe der Sterne oder der Sonne und des Mondes[14]) finden, eine Bestimmung, die für die geographische Orientierung von fundamentaler Bedeutung ist, so erhält der Bakulus ein Stativ.

Die beiden Endflächen müssen dann natürlich horizontal stehen, was durch ein Bleilot (etwa wie in Fig 4) kontrolliert wird.[15]) An beiden Endflächen bringt er in diesem Fall dünne Kupferplatten mit einem Sehloch an, so daß der Strahl die entsprechenden Löcher durchwandernd ins Auge gelangen muß. Auch die Längendistanz von Sonne und Mond und angenähert (aliqualiter) die Fixsternörter lehrt Leo mit seiner Hilfe zu messen.[16]) Endlich gibt er Vorsichtsmaßregeln für die einzelnen Beobachtungen. Für die Beobachtungen bei Nacht rät er ein Licht hinter den Kopf zu stellen, bei Nebel überhaupt nicht zu beobachten; betreffs der Distanz keinen größeren Winkelabstand als höchstens 40° zu nehmen, da das Auge ihn sonst nicht übersehen könne. Andererseits solle bei unbekannter Breite des

Sternes der Abstand nicht kleiner als 20^0 genommen werden, weil bei kleiner Distanz ein kleiner Ablesungsfehler schon großen Einfluß auf das Resultat üben kann.

Curtze hat aus dem Vorkommen des Namens „Jakobstab“ neben der Bezeichnung „Secretorum revelator“ schließen wollen, daß der Jakobstab vor Leo bereits ein bekanntes Instrument gewesen und von diesem nur verbessert und weiter ausgestaltet worden sei. Dazu ist zu bemerken: Leo selbst hat sicherlich ganz unabhängig seine Entdeckung gemacht, das beweist sein Gedicht: An den Stab,[17]) das doch grade das Unerhörte des Faktums ausmalen soll, daß ein bloßer Stab als Meßinstrument dienen könne. Für den des Pentateuch Kundigen löst der Begriff מקל (Stab) bereits die Erinnerung an die Stäbe Jakobs aus. So mag die Sucht der Alten, alles mit biblischen Namen zu belegen, mit der an die geschälten Jakobstäbe gemahnenden äußeren Form zusammen gewirkt haben, um den Namen Jakobstab dem Lewi in den Mund zu legen.

Uebrigens findet man den Bakulus als מטה לוי „Stab Lewis“ von Jochanan Alemanno, einem italienischen Juden des 16. Jahrhunderts, erwähnt.[18]) Man sieht, wie sofort die biblische Anspielung (Num. 17, 18) zur Hand ist. Vergleiche z. B. auch den Namen רובע ישראל (Num. 23, 10) für den Quadrans Judaicus.[19])

b) Die Dunkelkammer.

Die Geschichte des Jakobstabes, seine Bedeutung für die großen Entdeckungsreisen im Beginn der Neuzeit, alle die Umwandlungen, die er im Laufe der Zeit erfuhr, alles dies hat A. Schück in einem ausführlichen Aufsatz geschildert.[20]) Aber so bedeutend und berühmt er auch einst gewesen sein mag, so gehört er doch heute der Geschichte an. Heute orientiert sich der Seefahrer nicht mehr, indem er das Querholz langsam auf dem Stabe verschiebt; die Instrumentenkunde zählt ihn nicht mehr zum Handwerkszeug des Astronomen. Aber einer anderen Erfindung Leos ist eine größere Zukunft beschieden worden; sie hat sich in ihrer weiteren Ausgestaltung zu einem der unentbehrlichsten und fruchtbarsten Apparate für den Astronomen wie den Naturforscher überhaupt entwickelt: Das ist die Camera obscura.[21])

Zwei einander berührende rein astronomische Probleme waren es, die Leo vermittelst der Camera lösen will. Erstens wollte er die Größenverhältnisse der Radien von Sonne und Mond zu dem des Kreises finden, den sie außerhalb ihres Deferens beschreiben. Zweitens wollte er die Größe der Verfinsterungen von Sonne und Mond in Zollen (digiti) messen und damit das Verhältnis zwischen dem Gesamtdurchmesser des Körpers zu dem des verfinsterten Teiles feststellen. Besonders mit dem ersten Problem hat er sich lange beschäftigt. War die hipparchisch-ptolemäische Theorie richtig, daß die ungleichförmige Bewegung von Sonne und Mond in deren exzentrischen und epicyklischen Bahnen ihre Erklärung finde, so ergab sich mit Notwendigkeit, daß der scheinbare Durchmesser beider im Perigäum nicht derselbe sein konnte, wie im Apogäum und den Zwischenlagen. Jedoch war es nicht möglich, mit dem bloßen Auge die Verschiedenheiten zu konstatieren oder gar messend zu verfolgen. Ohne diese Beobachtung, so meint Leo, könne jedoch keine Entscheidung über das Vorhandensein und die Größe der Exentricität, also über die Richtigkeit der ganzen Theorie herbeigeführt werden. Sie erscheint ihm daher von fundamentaler Bedeutung zu sein. Auch die zweite Aufgabe konnte ohne technische Hülfsmittel nicht bewältigt werden; auch sie bildete ein wichtiges Anliegen der Astronomie, da eine Unzahl astronomischer Daten, vor allem die Perioden des Umlaufes von Sonne und Mond, sowie deren Entfernung von der Erde aus den Finsternissen abgeleitet wurde.[22])

Beobachtet man jedoch, das war Leos epochemachende Entdeckung, statt des direkten Bildes von

Sonne und Mond das Bild, welches sie „beim Durchtritt durch die Fenster eines Hauses“ erzeugen, so sind sowohl die Größen-Unterschiede ihres Halbmessers wie die Zolle der Bedeckungen der Messung leicht zugänglich geworden. Die Entdeckung Leos resultiert wahrscheinlich aus einer zufälligen Beobachtung. Der ständige Ausdruck „Fenster eines Hauses“ als gleichbedeutend mit „kleiner Oeffnung“ scheint darauf hinzuweisen, daß sich das Phänomen eines verkleinerten, scharfen Sonnenbildes bei einer engen Fensteröffnung ihm von ungefähr dargeboten hat Vielleicht ist auch die folgende Vermutung möglich. Die Sonnenfinsternisse wurden gewiß schon damals durch ein Loch in einem durchsichtigen Kartenblatt beobachtet; bei solcher Veranlassung könnte sich ihm die Erscheinung der Bilder kleiner Oeffnungen zuerst gezeigt haben Aber wie dem auch gewesen sein mag, er studiert diese neue optische Erscheinung immer im Hinblick auf jene astronomischen Probleme. Qualitativ erklärt sie sich ihm durch das Gesetz von der gradlinigen Fortpflanzung des Lichts; er beschreibt sie in all ihren Einzelheiten und entwickelt mit Hilfe euklidischer Geometrie ihre strenge Theorie. Er erkennt, daß, je kleiner die Oeffnung, desto schärfer das Bild, desto genauer das Messungsergebnis; bei minimaler Lochgröße liefert z. B. eine partielle Bedeckung als Bild eine scharf gerundete Sichel. Ferner: Die Bilder der Oeffnung sind umgekehrt — semper opposita pars facit oppositam crescere — die untere Hälfte des Gestirnes entspricht der oberen des Bildes, und ist die rechte Seite des Gestirnes verfinstert, so öffnet sich im Bilde die Sichel nach links.

Endlich fragt er sich, wovon die Größe des auf dem Schirm aufgefangenen Bildes (der kugelförmigen Lichtquelle) abhänge. Er antwortet mit dem Satz: Das Bild der Lichtquelle ist allerseits entsprechend dem Winkel, welchen der Halbmesser des leuchtenden Körpers an der Eintrittsstelle bildet, breiter als die Lochöffnung. Den

Satz beweist er zunächst für eine punktförmige Oeffnung durch die Gleichheit der Scheitelwinkel an der Oeffnung. (Siehe Figur 5.) Da nun aber dieser Satz für jeden Punkt der Oeffnung gilt, so werden bei größerer Weite der Durchtrittsstelle die Bilder aller einzelnen Punkte sich über- und nebeneinander legen, daher selbst bei gradliniger Begrenzung der Oeffnung ein rundes Bild erzeugen. So ergibt in der Tat eine Fensterecke die Form eines Viertelkreises. Der Schirmabstand selbst habe bei dieser speziellen astronomischen Beobachtung keinen Einfluß auf die Bildgröße. Denn die Gestirne sind wegen ihrer erstaunlichen Entfernung von der Erde als punktförmig (ihre Strahlen als parallel) zu betrachten und daher ihre Bildgröße nur von der Oeffnung selbst abhängig. Für die Finsternisbeobachtung selbst gibt Leo folgende Regel: Nimm eine r u n d e Oeffnung, stelle den Schirm mit Hilfe des Jakobstabes senkrecht zur Strahlenrichtung. Suche den größeren Durchmesser des unverfinsterten, den kleineren des verfinsterten Bildes und ziehe von jedem den Lochdurchmesser ab — denn im Verhältnis desselben ist ja das Bild vergrößert — dann gibt das Verhältnis der beiden Differenzen das Verhältnis des ganzen Körpers zu dem bedeckten Teile.

Leo betrachtet die Camera nicht als besonderen Apparat; er behandelt das Prinzip der Bilder kleiner Oeffnungen gewissermaßen nur als Hülfsmittel zur Vervollkommnung des Jakobstabes. Dieser wird erst in der Kombination mit der Camera der „Enthüller von Geheimnissen", ein Name, der eigentlich nur der Dunkelkammer zukommt. Das zeigt erstens die Bibelstelle (Hiob 12, 22): „Er enthüllt Verborgenes aus der Finsterniss," aus der der Name entnommen ist. Das zeigt ferner der Prologus der Petrusschen Uebersetzung,[23]) in welchem nur von der Schwierigkeit, die Exentricität und die Größe der Bedeckungen zu messen, die Rede ist, welche zu heben, Leo jenes Prinzip durch göttliche Eingebung gefunden haben will. Eine solche Bezeichnung würde auf den Bakulus allein nicht passen,[24]) der doch prinzipiell den Bereich der Beobachtungen nicht erweiterte, sondern nur ein vereinfachtes, vielleicht präziseres Instrument als die damals üblichen darstellt.*) Auch diese Ueberlegung dürfte dafür sprechen, daß aus dem Doppelnamen des Gradstockes kein Schluß gegen die Priorität der Lewischen Erfindung gezogen werden kann.[25])

---

*) Ich vermutete anfangs, daß der Name „Enthüller der Geheimnisse“ von Leo nur und lediglich der Camera vindiziert wurde. Bestärkt wurde meine Vermutung durch die Angabe Steinschneiders (Ersch und Gruber, II. Sekt. Band 43 S. 299), daß Leo noch ein zweites Gedicht mit der eben genannten Ueberschrift verfaßt habe, woraus also hervorzugehen schien, daß er jede seiner beiden Erfindungen einzeln poetisch verherrlicht habe. Ich ließ mir ein Photogramm jener Gedichte in Oxford anfertigen (dasselbe liegt dem hebräischen Teile an), fand jedoch meine Hypothese nicht bestätigt. Die wörtliche Uebersetzung jenes noch zu Lebzeiten Leos geschriebenen Textes, dessen erste Zeilen ebenfalls die Initialen Leos tragen, lautet: „Folgendes sind die Verse, die der Weise Mastro Lion zu Bagnol auf den Stab verfaßt hat, der ein Instrument (eine Säule) der Beobachtung ist, und den er „Enthüller der Geheimnisse“ genannt hat.

„Kommt Ihr Kinder, höret der Weisheit Kunde, die gottbegnadete Weise zu künden wissen. Dich, o Stab, hat ein Großer zu einem Werkzeug ausgestattet, alles Verborgene von den Geheimnissen des Schöpfers und seiner Schöpfung zu erkennen. Ist, was du vermagst, wohl ein Geringes? Durch dich erreicht der Mensch ihm unerreichte Pfade, und alle lichten Sterne hast du in seinen Bezirk gegeben, den Bau der Himmel und die Bahnen, die sie wandeln! Wer Rat wünscht, dem wird der Stab ihn künden. Fürwahr, wir können den beglücken, dessen Geist Gott erschlossen; er vermag Seine Herrlichkeit zu schauen, in Seiner Allmacht Tempel zu verweilen. Das Mittel hat er in der Hand, das Einsicht ihn lehret, Verborgenes zu erfahren von den Rätseln des Schöpfers und der Schöpfung. Alle Geheimnisse sind ihm offenbar von den Sternen des Himmels, er kennt ihren Weg, ihre Ferne und Größe.“

Dies Gedicht steht an Wert hinter dem durch die Edelmann'sche Veröffentlichung bereits bekannten zurück. Es enthält auch in bezug auf die Entdeckung selbst keine neuen Momente. Nur darauf möchte ich noch ausdrücklich hinweisen: In solchen Worten, wie den obigen, kann nur jemand reden, der sich bewußt ist, eine große, gewaltige Entdeckung gemacht zu haben. Gerade diese Gedichte sind nur dann zu verstehen, wenn wir uns vergegenwärtigen, daß das Instrument Leos überall das größte Aufsehen erregt und bei

c) Die Mondtabellen.

Dunkelkammer und Gradstock waren nun die beiden treuen Bundesgenossen Leos, mit denen er an die Erforschung der mysteria astronomiae heranging. Man wird jetzt gespannt sein, die Erfolge und Ergebnisse, die er mit ihnen erzielte, kennen zu lernen. Leo hat diese in dem Tabellenwerk: Luchoth hatchunah, dann in seinem Hauptwerk, dem fünften Traktat des liber bellorum niedergelegt, dem er die ersteren einverleibt hat.[26]) Beide harren jedoch noch der Erforschung von fachmännischer Seite. Steinschneider hat die hebräische Einleitung zu den Luchoth abgedruckt,[27]) und Renan[28]) nach Pariser Manuskripten die Kapitelüberschriften sowohl des hebräischen Originals wie der lateinischen Uebersetzung vom traktatus quintus veröffentlicht. Da ich in der Lage war, den Codex hebräus 314 der Münchener Sammlung selbst einzusehen, so gebe ich hier eine wörtliche Uebersetzung jener Einleitung, die in vielen Hinsichten die schriftstellerische Eigenart Lewis wiederspiegelt:

Also sprach Lewi ben Gerson: „Gepriesen und verherrlicht werde der Gott des Weltalls, auf dessen Wort die Himmel wurden, deren Einrichtung so voll ist der Weisheit, Gnade und Liebe, daß sie an Vollkommenheit alle menschlichen Begriffe übersteigt.[29]) Aber selbst bei dem geringen Maß von Verständnis, das Menschen erreichen können, haben sie großen seelischen Genuß. Gebenedeit sei der Schöpfer des Alls; er befahl, da entstanden aus Stoff ein und derselben Art[30]) die großen Himmelsleuchten und die Sterne, und Er setzte sie ein, daß sie hier in der niederen Welt mannigfaltige Wirkung üben, soweit hierher ihre Strahlen gelangen; sie ermatten und ermüden nicht, das zu tun, was ihnen Gott am

seiner ganzen Umgebung Bewunderung und Beifall gefunden hat. Leo ist offenbar überzeugt, gewissermaßen eine neue Epoche in der Astronomie heraufzuführen, da ja jetzt „alle Geheimnisse des Schöpfers und der Schöpfung für den Menschen enthüllt seien“.

Schöpfungstage geboten, wie Jesaia der Prophet es ausspricht (40,26): „Hebt empor eure Augen und schaut, wer dies geschaffen hat! Er führt ihre Heerscharen in bestimmter Zahl hinaus, alle nennt er bei Namen, in Fülle der Kräfte und starker Macht, keiner von ihnen wird vermißt.“ Hierin ist angedeutet, daß jedem Gestirn ein für es charakteristischer Name zukommt, und dieser Name entspricht ohne Zweifel den Kraftwirkungen, die nach der Ordnung der Dinge von ihm ausgehen.[31]) Da aber die Einflüsse von Sonne und Mond in der Natur offenkundiger sind als die der übrigen Himmelskörper, so habe ich beschlossen, eine leichte und kurze Rechnung aufzustellen, welche die wahren Konjunktionen (Neumonde) und die wahren Oppositionen, die in Perioden ohne Ende wiederkehren, darstellt, auf Bitten vieler und geehrter unter den Großen der Christen;[32]) nachdem ich Gott gelobt und gebeten habe, den Weg uns zu ebnen.

Wir erblicken in dieser Wissenschaft einen vierfachen Nutzen.[33]) Erstens: jedes Wissen ist für die Menschheit von Wert; es steht ein Wissen aber um so höher, je gewichtiger der Gegenstand desselben ist; aber offenbar sind die Himmelskörper höher im Rang als die Körper, die es unter der Mondsphäre gibt, abgesehen von dem moralischen Nutzen, den man aus diesem Wissen ziehen kann, wenn man an den Bewegungen der Himmelskörper den Wert von Harmonie und Gesetzmäßigkeit erkennt, wie es von Ptolemaeus im ersten Buch des Almagest dargelegt ist. Nirgends bestätigt sich das so sehr, als in den Berechnungen der Konjunktionen und Oppositionen der beiden „Leuchten“. Denn dieses Wissensgebiet hat einen höheren Grad der Vollendung erreicht als unser übriges Wissen betreffs der Himmelskörper, so daß in ihm ein Fehler kaum mehr merklich ist. Denn schon lange Zeit stellt man derartige Berechnungen an, schon an 2000 Jahre. Dagegen findet man in den übrigen Bewegungen, soweit frühere Generationen uns von ihrem Wissen überliefert haben, nicht geringe Fehler. Das zweite ist der Nutzen für religiöse Dinge. Denn in dieser Berechnung liegt der Schlüssel für die Kenntnisse all unserer Festtage, denn alle sind ihrer Zeit nach von den Mondmonat abhängig. Auch für die christliche Nation liegt in ihr der Zugang zur Erkenntnis der Daten der beweglichen Festtage.[34]) Das dritte ist der Nutzen in den Dingen, die zur Natur in Beziehung stehen. Insbesondere, wo Menschenarbeit die Natur zu Hilfe nimmt, wie in der Medizin, der Agri- und Hortikultur, Gebieten, in denen der Nutzen unserer Wissenschaft Gelehrten wie Laien bekannt ist. Viertens: wenn man eingesehen hat, daß aus der Konstellation der Gestirne und ihrer gegenseitigen Neigung sich die Wirkungen auf die Erde je nach der ihnen innewohnenden Kraft bestimmen, so kann man nichts beginnen, ohne die Kenntnis der Zeiten von Opposition und Konjunktion, wie es in ihren Büchern dargelegt ist.[35]) Daß jedoch in den Sternen die Quelle dieser Einflüsse auf die niedere Welt liegt, das stimmt ersichtlich mit der Anschauung der Thora und der Propheten überein.[36]) So heißt es in der Genesis bei der Schöpfung der Leuchten und der Sterne: „Sie sollen zu Zeichen und Zeiten sein bei Tag und bei Nacht;[37]) so spricht Gott zu Hiob (38, 33): „Achtest du auf die Gesetze des Himmels oder setztest du die Ordnung auf Erden?[38]) Solches also ist der Nutzen, den wir in dieser Berechnung erblicken. Der ganz besondere Nutzen ist aber folgender:

Wer in diese Wissenschaft einen Einblick hat, der weiß, daß man, um diese Berechnungen anzustellen, genau den Ort des Sonnenapogäums und das Maß der Korrektion der Sonne, des Mondes und der „sichtbaren Tage“ (die Zeitgleichung) kennen muß. Daß man ferner präzise den Ueberschuß des Mondumlaufes über den Sonnenumlauf für die Stunden angeben muß, um welche

Neu- oder Vollmond vor resp. nach Mittag fällt. In all diesen Dingen aber haben wir eine gewisse Verwirrung in den uns von Früheren überkommenen Berechnungen gefunden. Als uns nämlich bei den Sonnen- und Mondfinsternissen klar wurde, daß sie nicht so stattfanden, wie es sich aus den Berechnungen der früheren notwendig ergab, so forschten wir über alle die oben genannten Dinge, und erfanden ein Instrument, das uns in experimentell unanzweifelbarer Weise zeigte, wo das Sonnenapogäum liegt. Wir fanden es sehr weit von dem Ort entfernt, an dem es nach der Ansicht der Früheren hätte liegen müssen. Und indem wir mit unserer Beobachtung die unserer Vorgänger verbanden, offenbarte sich uns das Maß der Bewegung des Sonnenapogäums. Danach haben wir unsere Berechnung eingerichtet.

Auch im Bezug auf die Korrektion der Sonne geht unsere Ansicht mit der der Früheren auseinander. Nach langer Forschung erkannten wir aus den Mondfinsternissen das Maß der Korrektion und fanden sie nicht übereinstimmend mit dem, was unsere Vorgänger als ihr Maß hinterlassen haben. Auch in Bezug auf die Mondkorrektion fanden wir einen Unterschied sowohl in Bezug auf ihre Größe als auch auf die Methode (Ordnung) ihrer Berechnung. Als wir nämlich erkannten, daß der Mond weder eine epicyklische noch eine exzentrische Bahn habe in der Weise, wie die Früheren uns überkommen haben,[39]) und die Sache mit Hilfe jenes Instruments zu entscheiden unternahmen, das wir für diese Forschung erfunden haben, so lehrte es uns in experimenteller unanfechtbarer Weise, daß der

Mond in den Vierteln nur 1/25 des Monddurchmessers größer erscheint als in den Sizygien. Auch erscheint er, wenn er 180 Grad von der Sonne absteht, nicht größer als er am Anfang erschien. Dadurch fanden wir auch, daß die Mondgleichung nicht nach der Berechnung der dafür aufgestellten Tabellen verläuft, sondern an einigen Stellen nicht unbedeutend davon abweicht. So sahen wir uns gezwungen, über die astronomischen Gesetze nachzuforschen,[40]) die sich aus den beim Monde beobachteten ungleichförmigen Bewegungen und Maßen ergeben, und wir fanden eine astronomische Theorie, die übereinstimmt mit allem, was am Monde beobachtet wird, wie wir dies in unserem Werke an der dieser Untersuchung gewidmeten Stelle dargelegt haben, nämlich im ersten Teil des fünften Buches der „Kriege Gottes".[41])

Dagegen die Zeitgleichung fanden wir in den Tabellen, die ihrer Berechnung gewidmet sind, in einer Weise berechnet, die von drei Gesichtspunkten aus unrichtig erscheint: 1) Von seiten des Ortes des Sonnenapogäums, 2) von seiten der Größe der Sonnenkorrektion, 3) von seiten der Größe der Neigung zwischen den Polen der Ekliptik und den des Aequators.[42]) Daher waren wir genötigt, eine Berechnungsweise zu erfinden, die in allen Hinsichten mit der Wahrheit übereinkommt. Jedoch in der Kenntnis des Ueberschusses der wahren Mondbewegung über die wahre Sonnenbewegung zu den Stunden, um welche Neu- oder Vollmond vor bezw. nach Mittag angesetzt werden, ergab sich eine große Schwierigkeit; hätten wir sie in der Weise der Tabellographen berechnen wollen, so wäre daraus kein geringer Fehler erwachsen, insbesondere, wenn die Anzahl der Stunden vor oder nach Mittag groß ist. Darum haben wir uns sehr viel Mühe gegeben, daß diese Berechnung in jeder dieser Hinsichten richtig ausfalle. Und ist dem so, so ist klar, daß unsere Mühe nicht umsonst war, denn ist schon die rechnerische Auffindung eines gesuchten Neu- oder Vollmondes mit voller Genauigkeit lobenswert, selbst wenn sie nur mit Mühe gelänge, um wie viel mehr verdient unsere Berechnung Lob, wenn sie alle Zeiten[43]) umfaßt und das Resultat mit äußerster Leichtigkeit ergibt. So sei Gott, der mich den Weg der Wahrheit geführt hat, gesegnet und gepriesen.

Du mußt aber wissen, daß die Dauer des Mondmonats, über die wir eine erschöpfende Untersuchung[44]) angestellt haben, sich uns etwas kürzer herausstellte, als die Früheren angenommen haben; und zwar ist er angenähert gleich 29½ Tage, 44 Minuten und $^1/_{1138}$ Teil[45]) der Stunde. Ebenso fanden wir die ungleichförmige Bewegung etwas langsamer als unsere Vorgänger annahmen. Wir halten dies zu erwähnen für nötig, damit du dich nicht wunderst, wenn du zwischen den früheren und unseren Berechnungen eine Verschiedenheit findest. Siehe demgemäß haben wir die Erläuterung dieser Rechnung in 4 Abschnitte eingeteilt: 1) Erklärung der Tafeln, die wir in den folgenden Kolonnen aufgestellt haben; 2) die Darlegung, wie man aus ihnen eine m i t t l e r e Opposition oder Konjunktion finden kann; 3) wie aus der mittleren die w a h r e Konjunktion bezw. Opposition; 4) wie wir den wahren Sonnenort für jede beliebige Zeit erfahren können; daraus also den wahren Sonnenort zur Zeit des wahren Neu- oder Vollmondes, und die מעלה עומדת[46]) in der Mitte des Himmels für diese Zeit für den Meridian, in dem wir uns befinden, der vom äußersten Osten 9 Stunden 46 Minuten entfernt ist. Wir haben damit einen fünften Abschnitt verbunden, den wir den Forschern zum Geschenke machen. Darin wollen wir zur Kenntnis der Berechnung von Sonnen- und Mondfinsternissen und dem wahren Ort des Mondes für jeden beliebigen Tag des Monats vermittelst einiger hierfür aufgestellter Tabellen anleiten. Wisse auch, daß die

Ausgangspunkte dieser Berechnung sind: das Jahr 1320 nach der Fleischwerdung[47]) und die Stadt Ysop."

Soweit die Einleitung zu den Luchoth. Wir heben aus ihr nur die eine Tatsache hervor, die sich auch weiter unten bestätigen wird: Leo erkennt und lehrt zuerst die Beweglichkeit der Apogäen sämtlicher „Planeten", im Gegensatz zu Proklus und zu Ptolemäus, dessen Gegengründe er als hinfällig nachweist; messend stellt er auch die jährliche Bewegung der Apogäen fest, indem er die Beobachtungen der Alten mit seinen eigenen vergleicht.[48]) Diese Entdeckung ist eine Probe für die glückliche Verwendung des Jakobstabes in der Hand seines Erfinders.

d) Das Sefer Milchamoth.

Wenden wir uns nunmehr dem Hauptwerk Leos zu. Den Zweck desselben kennzeichnet er durch folgende Worte: „Unsere Absicht ist es, in diesem Traktat darüber nachzuforschen, welche Annahmen man über das System der Himmelskörper und ihre Anzahl machen muß, daß dadurch die an ihnen beobachtete Bewegung vollständig sich erkläre, übereinstimmend mit den Größenschwankungen, die bei den Sternen beobachtet wurden und in Gemäßheit der Grundlehren der Naturwissenschaft."[49]) Diesem hohen Ziel, der Astronomie gewissermaßen eine ganz neue Grundlage zu geben, entspricht die imponierende Anlage der Arbeit. „All sein Können und was er an Kräften besitzt,"[50]) hat er daran gesetzt, „propter immensam nobilitatem materiae;" ist sie doch „Endzweck und Vollendung der mathematischen wie theologischen Wisenschaften".[51]) Den Schwierigkeiten, mit denen eine solche weitschichtige und großangelegte Untersuchung verknüpft ist, vermochte er sich nur deshalb zu unterwinden, weil ihm in seinen neuen Instrumenten Hilfsmittel zur Verfügung standen, die all seinen Vorgängern und Zeitgenossen fehlten. Lewi verleugnet auch hier seine wissenschaftliche Forschungsweise nicht; immer sehen wir ihn „von dem Gegebenen zu den Prinzipien aufsteigen, sich dabei eigene Wege suchend“, immer läßt er zuvor die klassischen Autoren in der Astronomie ihre Meinungen vortragen und zeigt dann, in welchen Punkten man ihnen nicht folgen könne; er zeigt, welche Beobachtungen die Basis für alle theoretischen Konstruktionen bilden, lehrt diese Beobachtungen praktisch anstellen und weist nach, welche Messungen der Alten fehlerhaft und der Korrektur bedürftig sind. Neben Ptolemäus ist es vor allem Alpetragius, „der Schöpfer der neuen Astronomie, der die wissenschaftliche Welt durch seine Lehre erschüttert hat,“ mit Israeli zu reden,[69]) dessen Vorstellungen ihn entscheidend beeinflußt haben. Beider Lehren werden einer scharfen Kritik unterworfen,[70]) und der Nachweis erbracht, daß sie den präzisierten Beobachtungen gegenüber nicht Stand halten können, ja, daß Ptolemäus häufig Aussagen gemacht, die nicht auf Beobachtung, sondern auf der Deduktion aus seinen Prinzipien (radices suas sequendo) beruhen (126).[71])

Man wird nun das größte Interesse der Frage entgegenbringen, welches neue System Lewi an die Stelle der ihm überkommenen zu setzen hat, welches die doctrina sphärae, quae concordet omnibus motibus et ordinibus sein mag. Aber klar läßt sich dieses aus den Andeutungen der Inhaltsangabe nicht erschließen. Wenn man einigen meist nur äußerlichen Angaben Wert beimessen kann, so läßt sich folgendes sagen: Auch Leo denkt nicht an ein mechanisches System. Er bekämpft des Maimonides Ansicht, daß eine nicht um den Mittelpunkt erfolgende Bewegung ein Unding sei (45), er meint, daß eine sichere Grundlage für eine Theorie der Planetenbewegung nicht aus Experimenten und der Sinneswahrnehmung gewonnen werde, sondern nur mit Hilfe allgemeiner mathematischer Betrachtungen. Oportet habere rationes aliquas doctrinales et magistralia argumenta (49). Hatte Alpetragius angenommen, das Prinum mobile sei die höchste Sphäre und von ihr aus übertrage sich die Bewegung auf die niederen, so dreht Leo das Verhältnis um; er setzt den Anstoß zur Bewegung in die unterste Sphäre,[55]) und läßt die Uebertragung durch ein zwischen den Sphären befindliches hypothetisches Medium vermitteln, einen Stoff, der keine „Gestaltelastizität“ besitzt (גשם בלתי שומר תמונתו)[55a]) Er vermag sich der Meinung nicht anzuschließen, daß die Ungleichförmigkeit der Bewegung durch zwei einander entgegengesetzte Sphärenbewegungen zu erklären sei, von denen die eine die tägliche Umdrehung des Himmelsgewölbes von Osten nach Westen, die andere, die Eigenbewegung der Sterne, in umgekehrter Richtung sich vollzieht und daß aus der Kombination dieser freien und erzwungenen Umläufe der wechselvolle Lauf der Planeten sich erklärt.[56]) Weder durch einfache, noch durch exzentrische oder epicyklische Bewegungen werden die Tatsachen adäquat dargestellt (32—35). Vielmehr lehrt er, offenbar in derselben Vorstellungsweise, die dem eudoxischen System zu Grunde liegt: Die vielfache Bewegunng eines Sterns muß notwendig auf mehreren Sphären beruhen, die ihn an ihrer Eigenbewegung teilnehmen lassen; und zwar ist die Anzahl der Himmelskreise gleich der Anzahl der Bewegungen.[57]) Numerus orbium aequalis est numero motuum (27). Man hat also folgendes Bild: Jeder Planet gehört mehreren Sphären an, und indem jede derselben ihn bei ihrer kreisförmigen Bewegung mitnimmt, wird die resultierende Bahn des Sternes jene komplizierte Gestalt erhalten, welche die Beobachtung zeigt. In bestimmter Ordnung folgen die Sphären jedes Planeten aufeinander (31). Die untere Sphäre bewegt die oberen mit ihr verbundenen entsprechend ihrer Eigenbewegung (29); jedem Planet kommt eine eigene untere Sphäre zu, die seine tägliche Umdrehung bewirkt (30). Diesem Weltgebäude sollen alle Beobachtungen der Alten wie seine eigenen sich einfügen.

Wir haben bereits hervorgehoben, welche Bedeutung die Finsternisbeobachtungen für die Astronomie besaßen. So stehen sie auch bei Leo im Mittelpunkt seines Systems. Nachdem er dargetan, daß nicht immer die Mitte der Finsternis zur Zeit der wahren Oppostion stattfindet (79), leitete er aus Finsternisbeobachtungen die Länge des Mondmonates, das Maß der mittleren Sonnen- und Mondbewegung ab, ebenso wie die mittlere Bewegung der Knoten; aus dem Radius des am Monde gesehenen Erdschattens zur Finsterniszeit werden die Parallaxen und Abstände des Mondes und der Sonne von der Erde für Erdferne wie für die Erdnähe, endlich die Verhältnisse der Durchmesser von Sonne, Mond und Erde abgeleitet (90—92). Dabei sieht er wohl ein, daß die Sonnenentfernung auf diese Weise nicht einwandfrei eruiert werden könne; er schließt, daß es überhaupt unmöglich sei, sie genau zu bestimmen und daß man zu dem Ausweg seine Zuflucht nehmen müsse, sie zwischen zwei möglichst enge Grenzen einzuschließen (93). Dem Werk sind an gebührendem Orte mannigfache Tabellen eingefügt: solche der mittleren Sonnenbewegung (68); des wahren Sonnen- und Mondumlaufes je nach dem Abstand vom Knoten (77, 78); der Finsternisse und Mondgleichung (96 und 102), endlich Tabellen für die Breiten- und Längenbewegung der Planeten (105 ff.). Die letzteren behandelt Leo, nachdem er der Sonne und dem Mond seine Betrachtung gewidmet hat, in den Schlußkapiteln besonders eingehend; diskutiert die Annahmen, ob Merkur und Venus oberhalb oder unterhalb der Sonnensphären angenommen werden müssen und berechnet für jede dieser Annahmen die Entfernung der Planetensphären vom Erdzentrum und die Größe der Sterne im Vergleich zur Erdkugel (128—135). Noch manches andere berührt die Abhandlung; so eine Theorie der Milchstraße, Betrachtungen über die Fixsterne, die Leo alle in eine äußerste Sphäre versetzt, Anweisungen aus Sonnen- und Sternhöhen Zeitbestimmungen zu machen und umgekehrt, alle geographischen Verschiedenheiten in den sphaeris obliquis, der sphaera recta und parallela (52, 53, 62). Wesentlich erscheint dabei folgendes: Leo orientiert den Fixsternhimmel an Sonne und Mond, indem er die Sonnenhöhe und die Mittagslinie mit großer Genauigkeit finden lehrt. Durch diese Orientierung am Himmel will er die Planetenörter leichter und präziser verfolgen können (12—16).[58])

Alles dies sind jedoch nur leise Andeutungen darüber, in welcher Linie sich seine Gedankengänge bewegen. Leo hat sich gewissermaßen der Erde genähert, das Primum mobile in Erdnähe statt und in die äußerste Sphäre gelegt. Den Gedanken des Kopernikus, daß die Erde selbst Ursache einer scheinbaren Bewegung am Himmel ist, hat er zwar vielfach erwogen, das beweist seine mehrfache Polemik gegen eine derartige Annahme. Sie erscheint aber seinem in den damaligen Anschauungen befangenen Geiste als völlig unannehmbar. „Zur Zeit des Sonnenaufgangs und des Abends“, so bemerkt er in seinem Bibelkommentar,[59]) „wird es vollkommen klar, daß die Sonne sich bewegt, denn sie geht an einem Tage nicht an demselben Ort auf wie an dem zweiten. Und so beim Untergang. Würde nun der Sonnenball feststehen und die Erde sich bewegen, wie viele Leute dachten, so müßte der Aufgang der Sonne stets an demselben Orte des Horizonts erfolgen. Auch die Sterne sind alle in Bewegung, denn es zeigt sich, daß, wenn die Sonne ihren täglichen Umlauf beendet hat, daß die Fixsterne, die an dem einen Abend aufgingen, am zweiten Abend nicht aufgehen, sondern hoch über dem Horizont gesehen werden. Das beweist, daß die bei den Sternen beobachtete Bewegung nicht für alle dieselbe ist; würden aber die Sterne feststehen und die Erde sich bewegen, so müßte die beobachtete Bewegung für alle Sterne gleich sein." Leo vermochte also, wie es scheint, nicht abzusehen, warum bei Annahme einer beweglichen Erde Aequator und Ekliptik nicht in eine Ebene fallen sollten. Ein System, wie das heliozentrische, verwauf er also trotz der großen Vereinfachung, die es im Gefolge hätte, weil es nicht noch einfacher ist, ein interessantes Beispiel, mit welchen Argumenten eine neue, unfaßbare Idee bekämpft wird.

Die beiden anderen Teile des fünften Traktats können sich an Wert mit dem ersten bei Weitem nicht messen. Sie behandeln nach seinen eigenen Worten „die Ursachen (Zwecke) dessen, was im Himmel ist und die Beweger der Himmelskörper". Der Zweck der Gestirne ist, wie es die Einleitung zu den Mondtabellen bereits aussprach, hier auf Erden Wirkungen auszuüben, um die Unvollkommenheit und Mängel der irdischen Dinge zu ergänzen. Leo denkt auch hier an einen streng naturwissenschaftlichen Zusammenhang; wie von der Sonne sichtbarlich Gedeihen und Leben auf Erden abhängt, so haben auch Mond und Sterne mannigfachen Einfluß. Nur ist es schwer, diese Wirkungen im Einzelnen zu übersehen, weil erst die Kraftäußerungen und das Zusammenwirken aller Gestirne die Endwirkung ergibt und der spezifische Anteil eines bestimmten Gestirnes in der Summe schwer erkennbar bleibt. In diesem Sinn kennt auch Leo ein unlösbares „Vielkörperproblem". Hinzu kommt, daß in einem Punkte die Wirkungen der Sterne bedingt, nicht absolut sind; und hier schweigt der Naturforscher und der Mystiker in Leo kommt zu Worte. Die menschliche Willensfreiheit kann den Causalnexus der Gestirnseinflüsse durchbrechen, und je höher der Mensch steigt, umso größer ist seine Kraft, den Naturlauf, wie er in der Konstellation vorgezeichnet wäre, umzukehren.[60]) Die Astrologie erscheint ihm daher als vollständige

Wissenschaft;[61]) aber wie der moderne Metereologe gerne gesteht, daß infolge der Unübersehbarkeit aller ineinandergreifenden Ursachen der Witterungsänderungen keine Prognose unbedingte Gültigkeit hat, so kann auch das Horoskop trügen, zumal es den störenden Faktor der Rückwirkung der Willensfreiheit ganz außer acht läßt.

Die Wirkungen der Gestirne sind nun in ganz analoger Weise zu denken, wie die kalorischen der Sonnenstrahlung. Leo widmet daher der Frage eine ausführliche Untersuchung, wie die Erwärmung der Erde durch die Sonne geschieht.[62]) Als typisches Beispiel sei die Beantwortung dieser Frage hier dem Inhalt nach wiedergegeben. Er sagt: Die Sonne ist wesensverschieden von irdischen Stoffen, sie wärmt nicht, weil sie heiß ist, sondern infolge eines Agens, das von der Sonnenmaterie bedingt ist. Dies Agens ist nach Aristoteles entweder das Licht, das sich, wie in den Brennspiegeln, in Wärme umsetzt, eine Verwandlung, die am vollkommensten wird, wenn die Lichtstrahlen wie im Sommer senkrecht auffallen; oder es ist Reibungswärme, erzeugt durch die Bewegung der Sonne durch das minder harte (elastische) Medium der Sphären. Jedoch sind beide Ansichten unhaltbar. Licht kann als etwas Unkörperliches nicht wärmen, sonst müßte ja auch der Mond, zumal wenn er in Krebs senkrecht über der Erde steht, eine Temperatursteigerung bewirken, während das Gegenteil der Fall ist. Aber auch die Bewegung kann die Ursache nicht sein, denn alles in den Sphären ist aus Stoff einer Art.[63]) Bei der Reibung findet ferner keine Wärmeübertragung in die Ferne statt, es sei denn durch materielle Ueberträger, die Sonne aber übt ihre Wirkung, ohne daß die Sphären zwischen ihr und der Erde erwärmt würden. Ueberhaupt gibt es keinerlei Fernkräfte, immer wird das Mittel mit beeinflußt. Ferner ist nicht abzusehen, warum die infolge der Bewegung erzeugte Wärme über die Nachbarsphäre der Sonne hinausdringt, und da die Sonne nur einen Teil der Sphäre ausmacht, so wäre es doch folgerichtiger anzunehmen, daß von der Sphärenbewegung die Wärme herrührt. Dann aber fragt es sich, woher rührt der Witterungswechsel im Sommer und Winter? Warum erzeugt ferner der Mond, der der Erde viel näher steht, keine Reibungswärme? Alle diese Fragen bleiben nach Aristoteles Lehren ungelöst; sie zeigen, daß physikalische Prinzipien die Erwärmung der Erde durch die Sonne nicht erklären können. Die wahre Ursache ist jedoch ein geheimnisvoller Zusammenhang zwischen dem Sonnenstrahl und dem Element des Feuers. Ersterer vermag letzteres durch göttliche Kraft zu erregen.[64]) Diese Fähigkeit besitzt aber nicht das Licht als solches, sondern nur das Sonnenlicht, wie es Versuche mit dem Brennspiegel beweisen; nicht das des Mondes. Ist aber die Wirkung der Sonnenstrahlen nur durch eine von höherer Macht ihnen mitgeteilte Fähigkeit zu erklären, so hat es auch keine Schwierigkeiten, den übrigen Gestirnen tiefgreifende, ihren Strahlen durchaus inadäquate Einflüsse zuzuschreiben.

Auf Grund dieser Voraussetzungen, die „sich selbst beweisen, demjenigen, der in diesem Buche nachforscht", wirft er jetzt eine Reihe von Fragen auf, die in der Bestimmung der Gestirne, Wirkung zu üben, ihre Beantwortung finden. Joel hat sehr richtig geurteilt,[65]) daß die aufgeworfenen Fragen zum Teil antiquiert sind, weil sie nur innerhalb von Leos philosophischen und astronomischen Vorstellungen Berechtigung haben, z. T. als Fragen berechtigt, „aber nicht in der apriorischen Weise, wie er es versucht, zu beantworten" sind. Für den modernen Naturforscher hat es ja überhaupt etwas Mißliches, in der anorganischen Welt statt nach Ursachen nach außer den Dingen liegenden Zwecken zu fragen.

Der dritte Teil des Traktats fragt endlich nach den Bewegern der Himmelskörper. Gersonides meint: Anders als theleologisch könne die Mannigfaltigkeit der Eigenschaften der Gestirne nicht verstanden werden. Zweckmäßig aber kann nur ein beseeltes Wesen wirken. So haben wir uns die Sphärengeister sowohl wie die Geister der Gestirne selbst als immaterielle Wesen zu denken, die jeder in dem ihnen zugewiesenen Bereich zur Verwirklichung ihrer Bestimmung in der Weltenharmonie in unendlich oft wiederkehrenden Perioden umschwingen. 48 solcher Geister gibt es, entsprechend den 48 Sphären, welche die astronomischen Gesetze der Planetenbewegungen kennen gelehrt haben, so wie es für die 8 Planeten 8 Astralgeister gibt. Sie sind nicht unabhängig, unterstehen vielmehr dem „aktuellen Intellekt", dem „Erdgeist", wie man es passend übersetzt hat, der seinerseits wieder von der Ursache aller Ursachen, von Gott selbst abhängt. So werden wir durch Betrachtung der Himmelswelt endlich zum höchsten Wesen hingeführt. Diese 48 + 2 = 50 oder 8 + 2 = 10 Geister sind das Heer des Himmels, die Herrscher der Welt. Von ihnen rührt die Heiligkeit der Zehnzahl und der Zahl 50 in der Bibel her . . . . . Damit schließen wir die Betrachtung des berühmten astronomischen Werkes, dem „apud rabbinos"[66]) außer dem zeitgenössischen fundamentum mundi wohl keines an Wert gleichkommt. Es enthält mathematische und mystische, astronomische und astrologische, naturwissenschaftliche und religiöse Gedanken in bunter Mischung. Es bleibt noch die Aufgabe einer Spezialuntersuchung, das geschichtlich Bedeutungsvolle, das Ewige dieses Werkes ans Licht zu fördern und von dem rein Zeitlichen, Vergänglichen zu trennen.

VI.

Lewis mathematische Leistungen.

Lewi hat sich in allen von den Arabern gepflegten Zweigen der Mathematik, in Arithmetik, Geometrie und Trigonometrie versucht. Sein nach Klarheit und wissenschaftlicher Strenge ringender Geist sucht auch hier wie überall tief in die Gedanken der Vorgänger einzudringen, die Fundamente des von ihnen aufgeführten Gebäudes zu prüfen und seine Lücken auszufüllen. So können wir auf jedem der drei Gebiete selbstständige Leistungen unseres Autors verzeichnen.

a) Leos arithmetische Arbeiten.

Zwei arithmetische Werke sind uns von Leo erhalten, die bei aller inneren Verwandtschaft an Umfang und Bedeutung einander völlig ungleich sind, wie sie zeitlich weit auseinanderliegen. Das eine, der Maasse Choscheb, ein ausführliches Lehrbuch der Arithmetik, eröffnete, wie schon erwähnt, von einer kurzen logischkritischen Abhandlung abgesehen, seine wissenschaftliche Laufbahn, war jedenfalls auf mathematischem Gebiet seine Erstlingsarbeit; indes die zweite, die in ihrer lateinischen Uebersetzung den Namen de numeris harmonicis trägt, erst an seinem Lebensabend, im Jahre 1343, als nach seinen eigenen Worten „sein mathematisches Schaffen bereits beendet war", entstand und als letzte Gabe seines Geistes seine Schriftstellertätigkeit beschließt. So bilden diese Beiträge zur Wissenschaft der Zahl gleichsam die Umrahmung von Lewis literarischer Lebensarbeit.

Der Maasse-Choseb[1]) — der Titel wird ungefähr als „Werk des denkenden Rechners" sinngemäß wiedergegeben — zu dessen literarischer Erschließung unsere Arbeit mithelfen soll, blieb unverdienterweise bisher so gut wie unbeachtet. Obwohl wir noch handschriftliche Kopien desselben bis in die Mitte des 16. Jahrhunderts verfolgen können, so darf es sich an geschichtlichem Erfolg und literarischer Berühmtheit dennoch nicht mit den anderen Werken Leos vergleichen. Wir finden nirgends, weder bei Zeitgenossen noch bei späteren, eine

Erwähnung seiner Algebra, ganz im Gegensatz zu Ibn Esras Sefer Hamispar (Buch der Zahl), das während des ganzen Mittelalters studiert wurde, aus dem Elia Misrachi vieles schöpfte,[2]) an das Elia Levita[3]) ausdrücklich und wie wir sehen werden, Gersonides selbst bewußt anknüpften. Ihren Grund findet diese Erscheinung sehr wahrscheinlich nur in der schwer verständlichen, ungelenken Stylform[4]) Leos, vielleicht auch darin, daß das ganze Buch für einen allgemeinen Leserkreis zu wenig elementar gehalten ist.

Das Werk entstammt einer bestimmten historischen Situation und will aus dieser heraus gewürdigt sein. Es ist nicht das erste arithmetische Werk in hebräischer Sprache; die Arbeiten Ibn Esras, vor allem das bereits genannte umfassende „Buch der Zahl" gehen ihm voraus. Aber diese Arbeiten trugen für den denkenden Mathematiker alle eine gewisse Unvollkommenheit an sich, nämlich ihren rein dogmatischen Charakter. Die Regeln des Rechnens, die mannigfaltigsten Zahlenverknüpfungen werden gelehrt, mechanisch nach diesem oder jenem Verfahren das Resultat aufgesucht, ohne daß der Leser einen Einblick in den inneren Zusammenhang, in die algebraische Notwendigkeit dieser Vorschriften gewönne. Eine Verifikation für die Richtigkeit des Gesetzes wird durch reichliche Beispiele gewissermaßen experimentell gegeben; aber das konnte dem tiefer forschenden nicht genügen. Je größer die Bedeutung der Arithmetik für das tägliche Leben, je wichtiger sie insbesondere für die alle Geister damals fesselnde Astronomie sich erwies, um so weniger konnte man sich mit der mechanischen Fertigkeit in der Handhabung der Rechenmethoden begnügen, um so größer mußte das Bedürfnis der hebräischen Mathematiker nach einer theoretisch streng begründeten Rechenkunst werden. Diese Lücke zu empfinden und auszufüllen, war keiner berufener als Lewi ben Gerson.

Nun hatten 1270 Moses ibn Tibbon, 1277 Jakob ibn Machir die Elemente des Euklid ins Hebräische übersetzt;[5]) und war dieser auch vorher auf hebräischem Boden bereits kein Fremder mehr gewesen[6]) — baut sich doch z. B. Abraham bar Chijah's „Chibbur Hameschichah W'hatischboreth"[7]) ganz und gar auf ihn auf — so wurde er gleichwohl erst jetzt dort so recht heimisch; von jetzt an stand die gesamte jüdisch-mathematische Forschung unter seinem Banne. Es begann auch für die Juden eine Zeit, „wo man alles, was im Euklid stand, als bekannt voraussetzen durfte" (Nesselmann: Algebra S. 153). Euklid ist auch Leos Lehrmeister gewesen; dieser hatte ihn erkennen gelehrt, daß alle geometrischen wie algebraischen Zusammenhänge auf die einfachsten Grundprinzipien in Raum und Zahl zurückgeführt werden müßten; seine exakte Methodik hatte diesem den Wunsch und die Mittel gegeben, auch „in der Arithmetik nach den Gründen zu forschen". Eine erste Grundlage dafür bot das kanonische Werk des Griechen selbst, das ja vom 6. bis zum 9. Buche ausschließlich arithmetischen Inhaltes ist. Diese geben den Unterbau für Leos Unternehmen; auf ihnen galt es fortzubauen, damit alle die algebraischen Rechenmethoden begründet und neue vereinfachte abgeleitet werden konnten.

Die Systematik des Ganzen war damit bestimmt. Es handelte sich einmal, die algebraische Grundlage zu schaffen; zweitens aber, den dadurch gewonnenen didaktischen Fortschritt aufzuweisen, indem alle die verschiedenartigen rechnerischen Verfahrungsweisen sich als Folgerungen aus wenigen, streng bewiesenen Sätzen darstellten, die zugleich, heuristisch fruchtbar, zur Auffindung neuer Wege führten.

Für den ersten Teil war es, wie gesagt, für Leo das Gegebene, an Euklid in der Gestalt, die der Tibbonide ihm gegeben, anzuknüpfen; für den zweiten Teil aber mußte er naturgemäß sich an Ibn Esra[8]) anlehnen, obwohl Leo dies nicht ausdrücklich angibt. Es muß sich jedem Leser schon äußerlich sofort kundgeben, daß die beiden Teile dieses Werkes unter verschiedenen Einflüssen entstanden sind. Wenn man die im Cod. hebr. 36 der Münchener Königl. Bibliothek neben dem Maasse-Choscheb stehende Euklidübersetzung mit diesem selbst vergleicht und andererseits das Sefer Hamispar (etwa in der vorzüglichen Silberberg'schen Edition) zum Vergleiche heranzieht, so kommt man zu der Erkenntnis: der erste Teil ist ganz in der Terminologie und spröden Steifheit der Tibbonidischen Uebersetzung geschrieben; der zweite dagegen verrät schon durch den Styl, durch seine viel leichtere, flüssigere Form, durch die zahlreichen biblischen Wendungen die Verwandtschaft mit Ibn Esra, ebenso wie er in den technischen Ausdrücken noch häufig dessen Unsicherheit — oder, wenn man will, dessen Reichtum an synonymen Bildungen zeigt.[9]) Neben diesem sprachlichen Momente deuten auch viele Einzelheiten des Inhalts auf Ibn Esra hin, was jedoch genauer nur im Anschluß an den Text sich verfolgen läßt.

Auf Euklids Arithmetik aufgebaut, trägt Leos Werk denselben Charakter wie jene. Zunächst: sie ist, mit Nesselmann zu reden, r h e t o r i s c h e A l g e b r a. Formeln, Symbole zur bildlichen Bezeichnung der Operationen und des Zahlencharakters kennt sie nicht. Alles muß durch Worte ausgedrückt werden. Daraus ergibt sich mit Notwendigkeit die für unser Gefühl umständliche, weitschweifige und unübersichtliche Form der Lehrsätze, daraus die große Komplikation der Beweisführung. Eine algebraische Identität, die man in moderner Schreibweise momentan übersehen und prüfen kann, stellt sich in langatmiger Breite dar und erfordert zu ihrem Beweise einen unförmigen Aufwand an Bezeichnungen, eine verwirrende Menge von Hilfsgrößen. Besonders das Fehlen von Klammergrößen macht ständig die Einführung neuer Zahlzeichen nötig, deren Definition man dazu stets für die Kontrolle der hergeleiteten Beziehungen gegenwärtig halten muß. Wir sind heute so sehr gewöhnt, die Buchstabenformeln für uns denken zu lassen, daß wir erst durch Rückübertragung in deren Sprache die Sätze verstehen können; dann aber erleben wir die häufige Enttäuschung, in einem anspruchsvoll auftretenden Lehrsatze nur eine Trivialität wiederzufinden.

Zweitens: wie der griechische Geist in der Algebra sich nicht von der geometrischen Vorstellungsweise zu emanzipieren vermochte, so verleugnet auch Leos Darstellung an keiner Stelle, daß sie aus der Geometrie hervorgewachsen ist. So in der Terminologie, wo z. B. ein Produkt nicht anders als שטח = Fläche, ein Faktor צלע = Seite heißt;[10]) so in der jedesmaligen Veranschaulichung der Zahlengrößen durch Strecken, die allerdings ein vorzügliches Darstellungsmittel „allgemeiner, aller zufälligen akzessorischen Spezialitäten entäußerten Zahlen bilden."[11]) Es scheint beinahe, als hätte unter dem Einfluß des Euklid der Zahlbegriff gar keine andere Bedeutung gehabt, als insofern durch ihn eine Strecke charakterisiert ist, und daß die algebraischen Operationen nur in geometrischen Konstruktionen ihre Erklärung fanden. Leo selbst ringt mit dem Zahlbegriff; bevor er die Theorie der arithmetischen Reihen, also reine Zahlbeziehungen entwickelt, bringt er einen Satz: ist eine Zahl (durch eine Strecke) gegeben, so stellt sie einen Komplex von soviel Einheiten der Zahl dar, als die sie repräsentierende Strecke Längeneinheiten zählt (§ 19), als müßte er erst seinem Leserkreise sagen, daß die Zahl auch unabhängig von ihrem geometrischen Bilde gedacht werden könnte. Aber völlig frei konnte selbst Leo sich von diesem Hilfsmittel nicht machen; immer muß er wieder darauf zurückgreifen, besonders bei der Division ist die Hilfsvorstellung der in einem beliebigen Punkte geteilten Strecke ihm eine willkommene Stütze der Anschauung. (Dadurch ist er auch gezwungen, die doppelte Schreibweise der Zahlen bald durch einen, bald durch 2 Buchstaben von Euklid her zu übernehmen). Trotz dieser Abhängigkeit von dem „Buche der Elemente" liegt aber dennoch dem ganzen Werk die Anschauung zugrunde, daß die Arithmetik nur mit arithmetischen Mitteln operieren dürfe; daher wird überall auf geometrische Beweise prinzipiell Verzicht geleistet, und darin liegt historisch ein wichtiger Fortschritt.

Der oben skizzierte Endzweck des Maaße-Choscheb, die Begründung der arithmetischen Methoden, machte vor allem die Herleitung der Grundgesetze der Multiplikation und Division von Zahlen und Zahlensummen, ferner den Beweis mehrerer Relationen, wie die Formeln für $(a \pm b)^2$ u. a. m. nötig. Diese letzteren sind, als geometrische Sätze gefaßt, zum Teil bereits im zweiten Buche des Euklid bewiesen. Die Erkenntnis, daß sie auch algebraische Wahrheiten für Zahlgrößen bilden, muß sehr alt gewesen sein. Schon in den Schriften der lauteren Brüder, die, 1316 ins Hebräische übersetzt, ohne Zweifel Leo stark beeinflußt haben, finden wir ihre genaue Übertragung in die Sprache der Algebra. Leo erbringt aus dem einfachen Begriff der Multiplikation heraus für sie auch einen von der Geometrie losgelösten Beweis und hat damit in der Hauptsache eigentlich sein Ziel bereits erreicht, für die 4 Grundoperationen wie für die Potenzierung und deren Umkehrung das Fundament sich geschaffen.

Der sich hieran anschließende Abschnitt des ersten Buches erscheint uns der Beachtung nicht unwert. Hier wird eine zusammenhängende Darstellung der arithmetischen Reihen gegeben, wobei sich Gelegenheit bietet, mit Hilfe der Multiplikationsgesetze komplizierte Summen in leicht übersichtliche Produkte zu verwandeln. Systematisch werden die Summenformeln für n aufeinanderfolgende ganze Zahlen, deren Quadrate und Kuben berechnet, was alles dann im zweiten Traktat auf arithmetische Reihen mit beliebiger Gliederdifferenz ausgedehnt wird. Besonders ist für den Ausdruck für die Summe der Kuben eine hübsche Herleitung gegeben. Leo hat damit zwar den Besitzstand der zeitgenössischen Mathematik nicht vergrößert. Die einfache Summenformel war schon in die arabische Allgemeinbildung aufgenommen worden, wie ihr Vorkommen in den Schriften der lauteren Brüder beweist, und Leo fand sie, wenn auch ohne Beweis, bei Ibn Esra vor.[11a]) Die anderen Formeln hatte der berühmte Alfachri (Cantor I, S. 768 ff.) längst aufgestellt und teilweise wenigstens zu beweisen vermocht, die Gleichung

$$\sum_{1}^{n} n^3 = \left(\sum_{1}^{n} n\right)^2$$

unter Zuhilfenahme einer geometrischen Figur. Dafür aber ist Lewis Darstellung eine gerundete, in sich abgeschlossene, die das gesamte Material mit einheitlichen Mitteln zu einem Ganzen zusammenfaßt.

Vom Standpunkte der allgemeinen Geschichte der mathematischen Wissenschaften dürfte aus diesem Teile von Leos Werk nur eine geringe Ausbeute zu gewinnen sein. Aber unseres Erachtens neu und originell erscheint die am Schluß des ersten Buches angeführte Lehre von den Kombinationen. Leo kennt solche Komplexionen, die sich nur durch die Anordnung der Elemente (מחברות החתחלפות בסדר), und solche, die sich in ihrer Zusammensetzung unterscheiden (המתחלפות בנושאיהם); er kennt Kombinationen und Variationen von n-Elementen zur p ten Klasse. Er leitet den Satz von der Anzahl aller Permutationen von n-Elementen durch vollständige Induktion ab, indem er beweist, daß, wenn die Anzahl der Permutationen von $n-1$-Elementen bekannt, gleich P_{n-1}, ist, die von n-Elementen n-mal so groß, also $n \cdot P_{n-1}$ sein muß, und gewinnt so die Formel, die man heute mit $P''_n = n!$ bezeichnet. In sehr eleganter Weise ermittelt er ebenso die Anzahl der Kombinationen resp. Variationen von n-Elementen zur p ten Klasse und den Zusammenhang zwischen diesen und den Permutationen von p-Elementen. Nach jeder Darlegung überzeugt er sich, daß er keine Kombination vergessen oder doppelt gezählt habe.

In solcher Ausführlichkeit und in der vollen Würdigung der Kombinatorik als eines Teilgebietes der Algebra dürfte diese erst wieder im 16. Jahrhundert behandelt worden sein. Wie sehr Leo mit der Lehre von den Kombinationen seiner Zeit voraus war, beweist der Umstand, daß Luca Paciulo 1494 in seiner Summa de Arithmetica als eine Entdeckung die Anzahl der Versetzungen von 10 Personen angibt oder daß Curtze es für historisch bedeutsam hielt, wenn der Cod. lat. Mon. 234, der dem XIV. Saec. angehört, die Formel der Permutationen von n-Elementen enthält.[12]) Natürlich führten schon seit den ältesten Zeiten mathematische Probleme dazu, bestimmte Komplexionen zu berechnen; Cantor führt aus allen Perioden bei Apollonius, Pappus, auch bei den Indern[12a]) interessante Beispiele dafür an. Auch zu Leos Zeit hatte sich an die berühmte figura catta eine Untersuchung über die Anzahl der Permutationen von 3 Elementen geknüpft;[12b]) es ist nicht unmöglich, daß durch derartige Anregungen Leo dazu veranlaßt wurde, allgemein kombinatorische Beziehungen zu erforschen.

Die Theorie der algebraischen Gleichungen liegt fast ganz außerhalb des Rahmens dieser Lewischen Algebra; von ihr, die durch die Leistungen der arabischen Mathematiker, eines Alchwarizwi, Alkarchi u. a. m. bereits zu so beträchtlicher Höhe gediehen war, scheint er — offenbar infolge seiner mangelnden Sprachkenntnisse — nichts gewußt zu haben. Er löst zwar einige Aufgaben, die auf bestimmte oder unbestimmte Gleichungen des ersten Grades hinauslaufen, weiß sogar in bemerkenswerter Weise (am Schluß des 2. Buches) die verschiedenartigen Gleichungstypen durch lineare Substitutionen aufeinander zu reduzieren; aber im ganzen spielen diese Gleichungen nur eine episodenhafte Rolle, besonders weil nach Muster euklidischer Konstruktionsaufgaben die Lösung fertig gegeben und nur „bewiesen", d. h. durch Ausrechnung verifiziert wird. Ein allgemeiner Gesichtspunkt wird bei ihrer Behandlung nicht gewonnen.

Der zweite Teil des Werkes hat die Anwendungen der allgemeinen arithmetischen Sätze auf bestimmte Zahlen, also die Gesetze numerischen Rechnens zum Inhalt. Er wird durch eine Betrachtung der merkwürdigen Eigenschaften der Zahl 1 eingeleitet. Ein Nimbus von absonderlicher Mystik hatte sich durch die Einwirkung der Philosophie um diese Zahl gebreitet; sie sollte wesensverschieden von allen anderen Zahlen, streng genommen überhaupt keine Zahl sein; vielmehr sollte sie als Voraussetzung und konstitutives Element aller Zahlen ein Analogon der Gottheit bilden, das ἕν sollte dem ὄν entsprechen, aus dem alles Seiende emaniert ist.[13]) Wie die Chemie zwischen Element und zusammengesetztem Körper, zwischen Atom und chemischer Verbindung einen Unterschied macht, so stellte man — zurückgreifend auf die Euklidische Definition von μόνας und ἀριθμός — die Eins den Zahlen gegenüber. Diese Ausnahmestellung der 1 war ein uralter Gedanke; er zieht sich wie ein roter Faden durch die Geschichte der älteren Mathematik,[13a]) und indem man diesen Gedanken zu Ende dachte, erblickte man auch in den anderen Zahlen Gleichnisseund Symbole für Gruppen des Kosmos.[13b]) Unfähig, sich von ihm zu befreien, verwickelten sich die arithmetischen Betrachtungen in die seltsamsten Widersprüche; denn bei der Division mußte die 1, das Atom, das Unteilbare geteilt werden und in der arithmetischen Reihe 1 neben 3 als ungerade Zahl figurieren.[13c]) Jüdischen Mathematikern und Religionsphilosophen war jener Gedanke besonders sympathisch und einleuchtend; heißt es doch in dem bekannten Bibelverse[13d]) geradezu: „Höre, Israel, Gott ist 1.“ So hält auch Leo, obwohl er seinen Vorgängern, wie Ibn Esra, in den übrigen Zahlenspekulationen nicht folgt, an dem Satze: 1 ist keine Zahl unbedingt fest, fühlt aber wohl heraus, welche Schwierigkeiten sich dadurch auf Schritt und Tritt ergeben, wenn er die 1 bald in die Reihe der ungeraden, bald zu den Quadratzahlen rechnen muß. Er versucht sich daher jedesmal gegen den Vorwurf mangelnder Strenge zu rechtfertigen, meist aber wohl mit vergeblichen Mitteln.

Das Positionssystem, das er dann an erster Stelle entwickelt, war selbst in den Kreis der hebräischen Mathematik schon mindestens $1\frac{1}{2}$ Jahrhunderte früher eingeführt worden.[14]) Und doch ist es dort eigentlich ein fremdes Element geblieben; besonders die Zahlenschreibung in hebräischen Lettern, deren sich Lewi (in sehr charakteristischer Weise) einzig und allein bedient, machte dieser Neuordnung nur ungern Platz.

Nach wie vor bleibt die alte herkömmliche, unpraktische Schreibweise in Geltung; nur für die Schemata der Multiplikation, Division usw. mußte man wohl oder übel die Zahlen in die Positionsform umschreiben. Bei der Bruchrechnung werden die „astronomischen“ Brüche, d. h. solche, deren Nenner Potenzen von 60 sind, von den gemeinen streng geschieden, aber durch eine ausführlichere Behandlung offenbar als die wichtigeren bevorzugt. Dabei macht sich das Störende eines Doppelsystems, des Dezimalen für ganze, des Sexagesimalen für gebrochene Zahlen auffallend bemerkbar, um so mehr, als Leo in der Manier seine Zeit die Rechnung bis zu Dezimen und weiter treibt, ein Zeichen, mit welcher Routine man diese mühselige Bruchrechnung zu handhaben gelernt hatte.

Auf den Inhalt des zweiten Buches, das in der Entwicklung des arithmetischen Lehrbuches wegen seiner Strenge und wissenschaftlichen Darstellungsweise gewiß einen Platz verdient, soll hier nur kurz eingegangen werden. Leo gewinnt aus dem Gesichtswinkel heraus, daß alle algebraischen Operationen entweder eine Vermehrung oder Verringerung einer Zahl zur Folge haben, eine Systematik derselben und zu gleich die Disposition für das Ganze, das in sieben „Pforten“ zerfällt. Addition, Multiplikation und Kombination stehen auf der einen Seite, auf der anderen Subtraktion und Division und als deren Unterfall die Wurzelausziehung, die als Division mit einem unbekannten Divisor sich darstellt. Am Schluß folgt ein Abschnitt über die Lehre von den Proportionen, als einer Kombination von Multiplikation und Division, daran angeschlossen Aufgaben, teils mit Einkleidungen und Anwendungen auf das praktische Leben, teils von rein theoretischem Interesse. An Einzelheiten heben wir noch folgendes hervor: Die Subtraktion ist entgegen dem ursprünglich gegebenen Plane nicht vor der Division, sondern bereits in der ersten Pforte im Anschluß an die Addition behandelt, aber offenbar nicht aus der Erkenntnis heraus, daß sie deren Umkehrung ist, sondern weil das für sie geltende Rechenschema äußerlich dem der Summation ähnelt. Die Lösung einer Subtraktionsaufgabe für den Fall, daß der Minuend kleiner als der Subtrahend ist, wird ausdrücklich als unmöglich bezeichnet. Die Multiplikation, der die zweite Pforte gewidmet ist, wird auf den Satz aufgebaut, daß das Produkt aus dem einen Faktor entsteht wie der andere aus der Einheit, und von diesem Standpunkt die Multiplikation innerhalb des dekadischen und Sechzigersystems mit überraschender Einfachheit hergeleitet. Als spezielle Fälle schließen sich hieran die Quadrierung einer Zahl und ihre Erhebung zum Kubus. Bei dieser Gelegenheit wird eine Anzahl von praktischen Kunstgriffen gelehrt, z. B. wie man bei Multiplikationsaufgaben durch die Einführung der dekadischen Ergänzungen der Faktoren oder ihre Zurückführung auf Formeln wie $(a + b)^2$ die Ausrechnung vereinfachen könne, wobei Leos Anlehnung an Ibn Esra besonders klar hervorrtitt. Die dritte Pforte, die unter Zugrundelegung der Sätze des ersten Buches die Lehre von den Reihen behandelt, bringt zur Ergänzung jener zwei wesentlich neue Punkte: erstens die Erweiterung der Sätze und Relationen der natürlichen Zahlenreihe auf die allgemeine arithmetische Reihe; und indem Leo hier von dem Spezialfall zum allgemeinen aufsteigt, ist er damit denjenigen Weg gegangen, welchen die damalige induktiv verfahrende Algebra einschlagen mußte. Zweitens ist hier auch die geometrische Reihe und ihre Summenformel einwandfrei vorgetragen, schon hundert Jahre vor dem Italiener Beldomandi, der in den Werken der mathematischen Geschichtsforschung als der Entdecker der Summenformel gilt.[14a]) Der größte und ausführlichste Abschnitt ist der über die Gesetze der Division, der alle Einzelheiten der Bruchrechnung mit dem ganzen jetzt veralteten komplizierten Rüstzeug der Doppelbrüche, der gemeinen und astronomischen Brüche auf das schärfste behandelt. Das Schema, das Leo für die Division vorschreibt, ist im Gegensatz zu dem für die anderen drei Grundoperationen, die dem modernen ganz analog sind, insofern von dem unseren abweichend, als die Reste der Division über den Dividenden, die Teilprodukte unter den Divisor, das Resultat zwischen Dividend und Divisor gesetzt werden. Das Rechenbild ist also für die Zahlen 634 : 15 das folgende:

4	Rest, der ungeteilt bleibt,
34	
634	Reihe des Dividenden,
42	„ „ Resultats,
15	„ „ Divisors.
600	
30	

Die Theorie der Wurzelausziehung leitet Leo mit einer kurzen Bemerkung über die Unmöglichkeit der Darstellung irrationaler Wurzeln durch ganze oder gebrochene Zahlen ein. Die Existenz der Wurzeln ist ihm aus ihrer geometrischen Darstellbarkeit erwiesen. „Es ist unmöglich", sagt er, „in Zahlen die Wurzel einer ganzen Zahl auszudrücken, wenn diese Wurzel nicht selbst eine ganze Zahl ist, z. B. muß $\sqrt{10}$ zwischen 3 und 4 liegen; wenn nun 10 das Quadrat irgendeiner Zahl wäre, so müßte, da 1 ein Faktor von 10 ist, auch $\sqrt{1}$ ein Faktor von $\sqrt{10}$ sein; das ist aber nicht der Fall. Also hat 10 keine in Zahlen ausdrückbare Wurzel." Die Ausziehung der Quadrat- und Kubikwurzel wird dann mit übersichtlichem Schema, mit vielen Beispielen und strenger Begründung gelehrt. Eine Fülle von Näherungsmethoden, die besonders die recht verwickelte Radizierung aus sexagesimalen Brüchen erleichtern soll, illustriert hier, wie die theoretische Beherrschung der Materie der Praxis die Wege ebnen hilft. Überhaupt vermag Leo in allen Teilen des Werkes die in der Einleitung zu beiden Büchern gegebene Voraussage vollauf zu erfüllen, daß in dem logischen Aufbau der Arithmetik das sicherste und leichteste Mittel zur technischen Beherrschung der Rechenkunst liege; so gelingt es ihm, die Überlegenheit des denkenden Rechners über den bloßen Praktiker darzutun.

b) De numeris harmonicis.

Die zweite, weit kleinere Schrift: De numeris harmonicis, behandelt eine bestimmte algebraische, genauer zahlentheoretische Frage. Zu ihrer Behandlung wurde Leo durch einen äußeren Anlaß geführt.

Philipp von Vitry[15], Bischof von Maux, ein Mann voll Interesse für die Fragen der Musikwissenschaft, richtete an Leo die Aufforderung, den Satz zu beweisen, daß alle Potenzen von 2 und 3 und deren gegenseitige Produkte, die sogenannten harmonischen Zahlen, sich um mehr als die Einheit voneinander unterscheiden, abgesehen von den Zahlenpaaren 1 und 2, 2 und 3, 3 und 4, 8 und 9. Hier, wie bei den Mondtabellen, wurde also die Anfrage eines hochstehenden Christen für Leo die Ursache zu einer wissenschaftlichen Untersuchung, und das Faktum dieser Anfrage beweist, welches Ansehens auch auf rein mathematischem Gebiete Leo sich bei seinen Zeitgenossen erfreute. Die Beweismittel, die er dazu anwendet, sind äußerst einfach.

Daß außer für $m = 0$, $n = 0$ für keinen Wert von m und n zwei Potenzen 2^m, 3^m, $2^m \cdot 3^n$ übereinstimmen können, liegt auf der Hand, da alle Potenzen von 3 ungerade, alle Zahlen 2^m aber keinen ungeraden Primfaktor enthalten können. Wesentlich ist also vor allem der Nachweis, daß die Ungleichung:

$$3^m \pm 1 \neq 2^n$$

für alle Werte m und n (außer für $m = 1$ oder 2) besteht.

Zum Beweis schickt Leo folgende Sätze voraus, die sich in Formeln also darstellen:

1.

$$\frac{3^n - 1}{2} = 3^0 + 3^1 + 3^2 + \ldots 3^{n-1} = \sum_{p=0}^{n-1} 3^p$$

2. Das Aggregat von je 2 Gliedern

$$3^n + 3^{n+1} = 3^n (1 + 3)$$

ist stets durch 4 teilbar.

3. Das Aggregat von 4 aufeinanderfolgenden Gliedern $3^n + 3^{n+1} + 3^{n+2} + 3^{n+3} = 3 (1+3+9+27) = 3.40$ ist durch 5 und durch 8 teilbar.

Daraus ergibt sich zunächst die Ungleichung:

$$3^n - 1 \ddagger 2^m$$

Denn sei n ungerade, so ist $3^n - 1$ eine gerade Zahl,

$$\frac{3^n - 1}{2} = \sum_{p=0}^{n-1} 3^p$$

ungerade, da die Anzahl der Summanden dieser Summe ungerade ist, somit enthält $3^n - 1$ einen ungeraden Primfaktor.

Ist ferner $n = 4q$

(wo $q = 1, 2, 3 \ldots$),

so ist

$$\frac{3^n - 1}{2} = \sum_{p=0}^{n-1} 3^p$$

gerade und durch 5 teilbar, also keine Potenz von 2.

Ist drittens $n = 4q + 2$

(wo $q = 1, 2, 3 \ldots$),

so ist

$$\frac{3^n - 1}{2} = \sum_{p=0}^{n-1} 3^p$$

gerade, $\sum_{o}^{n-1} 3^p - 4$ ist durch 8 teilbar, daher

$$\frac{\sum_{o}^{n-1} 3^p - 4}{4} \quad \text{gerade,}$$

$$\frac{\sum_{o}^{n-1} 3^p - 4}{4} + 1 = \sum_{o}^{n-1} 3^p$$

ungerade, also enthält $3^n - 1$ wiederum einen ungeraden Primfaktor.

In analoger Weise ergibt sich die Richtigkeit der Ungleichung

$$3^n + 1 \ddagger 2^m$$

Denn ist n gerade, so ist

$$\frac{3^n - 1}{2} = \sum_{o}^{n-1} 3^p$$

gerade als Summe einer geraden Anzahl ungerader Summanden;

$$\frac{3^n - 1}{2} + 1 = \frac{3^n + 1}{2}$$

also ungerade, und $3^n + 1$ enthält einen ungeraden Primfaktor.

Ist aber n ungerade, so ist

$$3^n = 3 \cdot 3^{n-1}$$

$$\frac{3^{n-1} - 1}{2} \text{ (gerade) } = \sum_{o}^{n-2} 3^p$$

teilbar durch 4;

$3^{n-1} - 1$ also teilbar durch 8, ebenso

$3 \cdot (3^{n-1} - 1) = 3^n - 3$ durch 8 teilbar; mithin

$$\frac{3^n - 3}{4} \text{ gerade,}$$

$$\frac{3^n - 3}{4} + 1 = \frac{3^n + 1}{4}$$

ungerade, also enthält $3^n + 1$ einen ungeraden Primfaktor.

Endlich gelten auch für die Potenzprodukte die Ungleichungen

$$2^m \cdot 3^n \neq 2^p \pm 1$$

$$2^m \cdot 3^n \neq 3^p \pm 1.$$

Eines Beweises bedarf die erste Formel, die für $m \geqq p$ eine Trivialität ist, nur für $m < p$.

Sei

$$m = p - q,$$

so ist die linke Seite der Ungleichung um

$$2^m (3^n - 2^q)$$

verschieden von 2^p; diese Größe kann aber nur in den von vornherein ausgeschlossenen Fällen gleich ± 1 sein. Entsprechend ist der Beweis für die zweite Ungleichung.

Für die Beweisführung durfte Leo hier wie im Maße Choscheb die Kenntnis des Euklid voraussetzen. Aber er mußte auch mit dem Rüstzeug euklidischer Sätze auskommen, sollte anders sein Beweis mathematische Geltung haben. So ist diese Schrift, in der *ein zahlentheoretisches Problem mit den Hilfsmitteln der eukli-*

dischen Elemente gelöst wird, ein beredtes Zeugnis, wie tief jene das mathematische Denken des Mittelalters beeinflußt haben. Und man sieht es der Arbeit auf den ersten Blick an: Euklid hat ihr Pate gestanden, er ihren Inhalt, ihre Form und ihren Stil bestimmt. In dieser Beziehung ist unsere kleine Schrift besonders interessant. Nicht weniger als sechsmal wird Euklid zitiert. In der Manier des Euklid werden Definitionen dem Ganzen vorausgeschickt, wenn sie auch nur über das Selbstverständliche eine Aussage liefern; in seiner Art wird jede noch so minimale mathematische Erkenntnis in die Form eines Lehrsatzes gebracht, mit einem Beweis versehen und mit einer Figur illustriert, damit man sich bei den Folgesätzen auf ein reiches Material von Vordersätzen berufen könne und der Eindruck verstärkt werde, als handle es sich um eine fernliegende, scharfsinnig eruierte Wahrheit. So liebte es der scholastische Geist. Man berauscht sich förmlich an der formalen Strenge, in der man den Inbegriff aller Wissenschaftlichkeit erblickt, an der Demonstration more geometrico, in der noch Spinoza den Königsweg zur Wissenschaft finden wollte.

c) Trigonometrie.

Die beiden bisher besprochenen Werke Leos, seine Verdienste um die Algebra, müssen sich noch die ihnen gebührende Anerkennung erringen. Anders die trigonometrischen Leistungen unseres Autors. Durch die Mitteilungen Maximilian Curtzes in der Bibliotheca mathematica sind sie der Forschung erschlossen worden. Wir wollen an dieser Stelle daher nur kurz über sie berichten, vor allem, um ihre historische Stellung ins richtige Licht zu setzen. Zum besseren Verständnis holen wir ein wenig aus[16]).

Die Trigonometrie ist ein Kind der Astronomie, aus ihren Bedürfnissen und ihren Problemen hervorgewachsen. Daher ihr eigentümlicher Entwicklungsgang; daher ihre nur allmählich sich vollziehende Loslösung von der Mutterwissenschaft, ihre späte Anerkennung als selbständige mathematische Disziplin; daher die frühere Ausbildung der sphärischen vor der ebenen Trigonometrie. Die erstere war auch im hebräischen Sprachgebiet früher eingebürgert. Das große Kompendium der Astronomie, das Isaak Israeli 1310 als Einführung in die Kalenderkunde auf rabbinische Aufforderung hin schrieb und das einen treuen Spiegel für den Umfang der mathematischen Kenntnisse der damaligen gebildeten Juden bietet, kennt die Trigonometrie des rechtwinklig sphärischen Dreiecks vollständig[17]), unter anderem auch den Sinussatz für diesen Fall. Es unterliegt kaum einem Zweifel, daß Leos astronomisches Werk die Trigonometrie der Kugel ebenso exakt entwickelt. Worin er darüber und über ähnliche zeitgenössische Arbeiten hinausging, ist die Vertiefung der e b e n e n Trigonometrie, und das ist wohl der Grund, weshalb Petrus von Alexandrien für Clemens VI. neben der Beschreibung des Secretorum revelator auch Leos Abhandlung de sinibus, chordis et arcubus übersetzte.

Trigonometrie war ursprünglich Sehnenrechnung[18]); insofern die Sehne eine Funktion des Bogens, dieser aber seines Zentriwinkels ist, hatte sie gedient, trigonometrische Zusammenhänge erst graphisch , dann rechnerisch darzustellen. Ptolemäus hatte, obwohl er nahe dazu geführt war, den Schritt nicht getan, die halbe Sehne als Sinus des halben Winkels einzuführen[19]), ebenso wie er es nur an wenigen entscheidenden Beobachtungen hatte fehlen lassen, um einzusehen, daß sein geozentrisches Weltsystem unhaltbar sei[20]). Diese Ptolemäische Tradition hat durch den Einfluß des Almagest sich lange erhalten. Ja, nachdem durch die Inder der Sinus bekannt und in seinen Vorzügen vor der Chorde erkannt war, fiel Djabir ibn Aflah in die unbehilfliche Rechnungsweise der Alexandrinischen Schule zurück[21]). Infolgedessen spricht auch Leo über Sinus und Chorde nebeneinander, gibt aber der ersteren bewußt den Vorzug und benutzt letztere nur in untergeordneter Weise. A b e r g e r a d e d i e s e D o p p e l t r a d i t i o n d e s S i n u s n e b e n d e r S e h n e s c h e i n t f ü r L e o v o n N u t z e n g e w e s e n z u s e i n , i h n n ä m l i c h a u f d i e S p u r d e s e b e n e n S i n u s s a t z e s g e f ü h r t z u h a b e n.

Leo benutzt insgesamt vier trigonometrische Funktionen (siehe Figur 1 und 2 der Tafel II.), die Chorde, die Sagitte[22]), definiert als Projektion der Chorde auf den Kreisdurchmesser, den Sinus, definiert als Hälfte der Sehne des doppelten Bogens[23]), endlich den Kosinus als sinus residui arcus 90 graduum. Mit Hilfe euklidischer Sätze ergeben sich für diese Größen die Relationen:

(1) $\sin^2 \alpha = \text{chord}^2\, \alpha - \text{sag}^2\, \alpha$

(2) $\sin^2 \alpha = \text{sag}\, \alpha\, (2\,r - \text{sag}\, \alpha)$

(wo r = Radius, im folgenden = 1 gesetzt).

(3) $\text{chord}^2\, 2\,\alpha = 2 \sin \nu;$

$\text{chord}\ (180 - \alpha) = (2\,r - \text{sag}\, \alpha)^2 - \sin^2 \alpha$

$= \sin^2 \alpha \left(\dfrac{\sin^2 \alpha}{\text{sag}^2\, \alpha} - 1\right)$

(4) $\text{sag}\,.\,\alpha + \cos \alpha = 1;\ \text{sag}\,(90 + \alpha) = 1 + \sin \alpha$

(4ª) $\text{sag}\, \alpha = 1 - \sqrt{1 - \sin^2 \alpha}$

Mit einfachen geometrischen Mitteln schafft sich Leo alsdann ein Additionstheorem der Chorde. Aus Fig. 3 und Fig. 4 liest man ohne weiteres die Sätze ab:

(5) $\text{chord}^2\, (\alpha + \beta) = (\sin \alpha + \sin \beta)^2 + (\text{sag}\, \alpha - \text{sag}\, \beta)^2$

(6) $\text{chord}^2\, (\alpha - \beta) = (\sin \alpha - \sin \beta)^2 + (\text{sag}\, \alpha - \text{sag}\, \beta)^2;$

daraus folgert er: Nach (3) ist $\text{chord}\, 2\, \alpha = 2 \sin \alpha$, also kann aus $\text{chord}\, (\alpha \pm \beta)$ der $\sin \dfrac{(\alpha \mp \beta)}{2}$, aus diesem $\text{sag}\, \dfrac{(\alpha \mp \beta)}{2}$ nach (4ª), nach (1) endlich die $\text{chord}\, \dfrac{(\alpha \pm \beta)}{2}$ berechnet werden.

Mit Hilfe dieser Ergebnisse stellt Leo jetzt eine Sinustabelle her, und zwar wiederum in den Spuren des Ptolemäus[1], indem er den Durchmesser in 120 Grade, diese in Minuten und Sekunden teilt und den Sinus in solchen Graden (in quantitate diametri) ausdrückt. Ausgangspunkt sind die Sinusse von 90°, von 30° und 18°, die aus elementargeometrischen Lehrsätzen bekannt sind. Aus sin 30^0 findet er durch wiederholteWinkelhalbierung direkt den sin$(15'—{}^1/_{64}{}^0)$,

aus sin $24 = \sin \frac{(30^0—18^0)}{2}$, den sin 6^0, der in Verbindung mit dem aus sin 90^0 und sin 18^0 bekannten

$$\sin 2\tfrac{1}{4}{}^0 = \sin (11\tfrac{1}{4}{}^0 — 9^0)$$

den sin $8\frac{1}{4}{}^0$ gibt, woraus bei fortgesetzter Anwendung der Winkelhalbierung Sinus $(15' + {}^1/_{128}{}^0)$ folgt. Diese beiden Sinus von $15' + {}^1/_{64}{}^0$ und $15' + {}^1/_{128}{}^0$ sind aber bis zu den Quinten den zugehörigen Bögen proportional. Also kann durch Proportionsrechnung der Sinus von $\frac{1}{4}{}^0$ gefunden und mit dessen Hilfe eine von 15' zu 15' fortschreitende Tabelle aufgestellt werden.

Eine Probe derselben hat folgende Gestalt:

Gr.	Min	Gr.	Min	Gr.	Min	Sek.			Gr.	Min	Gr.	Min	Gr.	Min	Sek.	
0	15	179	45	0	15	42	0,00436144	0,004363	45	15	134	45	42	36	40	
0	30	179	30	0	31	25			45	30	134	30	42	47	42	0,7132644 gegen 0,71325
1	0	179	0	1	2	50	0,0174541	0,017452	46	0	134	0	43	9	37	
44	45	135	15	42	14	27			89	45	92	15	59	59	59	
45	0	135	0	42	25	35	0,7070954	0,707107	90	0	90	0	60	0	0	

(Die Zahlen der vierten Kolonne geben für einige den Leoschen Wert in Dezimalbrüche umgerechnet, die der fünften sollen einen Vergleich mit den Zahlen moderner Tabellen ermöglichen. Man ersieht, daß Leos Tabelle bis auf 5 Dezimalen genau ist.) [26])

So hat Leo sich die Mittel beschafft, trigonometrische Dreiecksberechnungen auszuführen. Er beginnt mit dem rechtwinkligen Dreieck, wobei er an Ptolemäus anknüpfen kann[27]), und zeigt, wie aus 2 Seiten die Winkel gefunden werden. Auf diesen Fall führt er dann den des schiefwinkligen Dreiecks, dessen drei Seiten gegeben sind, zurück, indem er — analog wie man heute bei der Ableitung des Kosinussatzes verfährt — dasselbe durch eine Höhe in zwei rechtwinklige zerlegt, [27a]) wobei er auf den verallgemeinerten Pythagoras sich stützt.

Der Fall, daß zwei Seiten und ein der einen Seite gegenüberliegender Winkel gegeben sind, führt ihn nun zum Sinussatze. Indem der umschriebene Kreis des Dreiecks konstruiert wird, zeigt es sich, daß mit $\sphericalangle \alpha$ der Bogen über a, also a selbst im Gradmaß gegeben ist, aus dem Verhältnis a : b aber in Gradmaß umgerechnet, der Bogen über b und damit $\sphericalangle \beta$ gefunden werden kann. Also da aus einem Winkel die Chorde ermittelt werden kann, d. h. die Dreieckseite im Gradmaß, so liefert der Winkel in Verbindung mit dessen gegenüberliegender Seite den Faktor, mit welchem jede der beiden andern Seiten multipliziert werden muß, um die Chorde des ihr gegenüberliegenden Winkels zu geben. Oder mit andern Worten: die Seiten des Dreiecks in Gradmaß ausgedrückt, sind die doppelten Sinus der Dreieckswinkel; damit ist

$$\frac{\sin \alpha}{\sin \beta} = \frac{2 \sin \alpha}{2 \sin \beta} = \frac{\text{chord } 2\alpha}{\text{chord } 2\beta} = \frac{a}{b}$$

eine Identität. Leo drückt das so aus: „Sequitur . . ., quod si diameter circuli poneretur 60 gradus et circumferentia 180°, non oporteret computare chordas arcuum in fabulis arcuum et sinuum nisi in quantitate, in qua computantur sinus, qui sinus est medietas chordae arcus duplati[28]). Unde sequitur, quod proportio sinus arcus ad medietatem diametri est talis, qualis est proportio chordae alicuius arcus ad diametrum . . . Ex isto corollario sequitur: Omnium triangulorum rectilineorum talem proportionem una linea habet ad aliam, qualem unus sinus angulorum, quibus dictae lineae sunt subtensae, habet ad alium."

An letzter Stelle folgt alsdann die Kombination „a, b, γ", d. h. zweier Seiten und des eingeschlossenen Winkels, die wieder durch Zurückführung auf den Fall des rechtwinkligen Dreiecks gelöst wird, denn indem man das Lot fällt, ist das eine Teildreieck bekannt, mit dessen so ermittelter zweiter Kathete aber das andere zu berechnen.

Leo ist einer der ersten europäischen Schriftsteller über Trigonometrie[30]). Den Sinussatz entdeckt zu haben, ist sein

Verdienst, und er zieht aus ihm alle Folgerungen, die wir noch heute aus ihm ziehen. Leos Arbeit weicht vollständig von der Gebers und der des Nasir-ed-din[31]), der beiden Begründer der ebenen Trigonometrie, ab und stellt eine „selbständige, nette und vollständige Trigonometrie“ dar[32]).

d) Geometrie.

Im Mittelpunkt der wissenschaftlichen Forschung und Entwicklung Lewis stehen Euklids Bücher der Elemente. Überall, in der Algebra, Trigonometrie und Astronomie, sahen wir ihn auf sie zurückgreifen. Die Wissenschaft der Geometrie ist für ihn in diesen Büchern beschlossen. Was Wunder also, wenn zu den zahlreichen Erklärern und Bearbeitern derselben auch Lewi sich gesellt. Zwei geometrische Abhandlungen rechnet Steinschneider[33]) in seiner Übersicht über Lewis Schriften auf. Eine Einleitung zu den ersten fünf Büchern der Elemente und ein in der kostbaren mathematischen Sammlung des Codex hebraeus 36 der Münchener Hofbibliothek[34]) allein uns erhaltenes Bruchstück, das der berühmte Bibliograph als eine Arbeit über das Parallelenaxiom anspricht. Die Einleitung zu den fünf Büchern war offenbar die zeitlich vorangehende Schrift. Sie ist etwa wie der größer angelegte Kommentar des Anaritius[35]) und wie Lewis Kommentare zu Averroes gehalten: Ein Ausspruch des Euklid geht voran mit der Bemerkung אמר אקלידם dixit Euclides, daran schließt die Bemerkung Lewis אמר לוי dixit Leo. Was Leo vor allem interessierte, das waren die Axiome, die in ihrer bevorzugten und eigenartigen Stellung innerhalb des Gebäudes der Geometrie ihm ein zu interessantes logisches und erkenntnistheoretisches Problem boten, als daß er an ihnen hätte vorbeigehen können. Diese Axiome glaubte er „beweisen“, also ihres axiomatischen Charakters entkleiden zu können. Leo betrachtete diese „Beweise“ für eine große wissenschaftliche Errungenschaft, für eine ähnliche, wie seine astronomischen Schöpfungen, deren Bedeutung er gerade in ihrem Aufbau aus streng bewiesenen Erfahrungen und Beobachtungen erkannte. Aus dieser Anschauung heraus, eine axiomenfreie Geometrie aufstellen zu können, beschloß er, ein geometrisches Lehrbuch zu schreiben, das seine eigenen und die von Fremden gegebenen Berichtigungen euklidischer „Irrtümer“ in die Darstellung verweben, exakter und voraussetzungsloser, gewissermaßen eine Fortbildung des Euklid darstellen sollte. So entstand die zweite geometrische Schrift. Von diesem Lehrbuch ist das Fragment in München einzig uns erhalten geblieben, dessen Inhalt also Steinschneider zu eng gefaßt hat.[36]) Das ganze Werk trägt die jedoch von der Hand der Kopisten herrührende Überschrift „Buch der Wissenschaft der Geometrie“,[38]) חבור חכמת התשברת

Was zunächst den „Kommentar zu Euklid“ betrifft, so charakterisiert Leo den Plan, den er mit diesem verfolgte, sehr glücklich mit den Worten: „Wir wollen das ergänzen, was im Buche der Elemente der Ergänzung bedarf, damit dieses von reichem Nutzen in der geometrischen Wissenschaft werde, deren Grundlagen aus ihm entnommen sind.“ Der Ergänzung bedürftig erschienen aber vor allem die von Euklid als Forderungen und Axiome hingestellten Wahrheiten. Es ist vorweg zu bemerken, daß Leo allerdings häufig den großen Griechen zu äußerlich faßte und die Gründe nicht erkannte, warum Euklid auf Beweise verzichtete, die ihrem Wesen nach der Mechanik angehören, also nicht rein geometrisch sind[38]). So glaubt Leo die Forderung, daß alle rechten Winkel einander gleich sind, als Forderung nicht gelten lassen zu dürfen, und er bemerkt: „Der Satz ist selbstverständlich, da ja der rechte Winkel ein Maß ist. Dennoch gelingt es uns, dafür einen Beweis zu erbringen. Zum Beispiel stehe Linie A B (siehe Figur 1 auf Tafel III) unter einem rechten Winkel zur Linie C B D und die Linie E F unter rechtem Winkel zur Linie G F H, so behaupte ich, daß Winkel A B C gleich Winkel E F G ist. Beweis: Legen wir Linie G H auf Linie C D, so daß Punkt F von G H auf Punkt B von C D falle und G H genau auf C D zu liegen komme und sich mit ihm decke, so sagen wir, daß da notwendig Linie E F genau auf A B falle. Denn wäre es anders möglich, so falle sie etwa in die Richtung B K. Da nun Winkel E F G gleich E F H war, so müßte Winkel K B C gleich Winkel K B G sein, dann ist aber Winkel A B C kleiner als K B D. Ferner: da Winkel A B C gleich dem Winkel A B D ist, so ist Winkel A B C größer als Winkel H B D. Er sollte aber bereits kleiner sein. Das ist ein Widerspruch. Also ist klar, daß alle rechten Winkel miteinander gleich sind".[39]) Dabei erkennt Leo nicht, daß Euklid diesen Beweis grundsätzlich ablehnt.

Oder ein zweites Beispiel. Wenn Euklid als Definition des Durchmessers die Form wählt: ein Durchmesser ist eine Sehne, die den Kreis in zwei gleiche Teile zerlegt, so vermeidet er es absichtlich, diese Eigenschaft des Durchmessers als Lehrsatz aufzuführen, weil er das Verfahren der Deckung kongruenter Figuren umgehen will. Leo aber sagt: „Dies ist keine Definition, sondern eine Wahrheit (ein Lehrsatz) und gehört auch nicht zu den Dingen, die selbstverständlich sind.[40]) Wir wollen es daher mit einem Beweise darlegen. Sei (siehe Figur 2) die Linie, auf der die Punkte B, D und E liegen, ein Kreis, dessen Mittelpunkt C und die Linie A C B ein Durchmesser des Kreises, so behaupte ich, Fläche A B D ist gleich der Fläche A B E. Beweis: Legen wir Segment A B E auf Segment A B D, das heißt, legen wir die Linie A B des einen Segments auf A B des zweiten, so daß A auf A und B auf B falle und B C auf C falle, so sage ich, daß dann Bogen A E B gleichmäßig Bogen A D B bedeckt. Denn wäre es anders möglich, so müßte eine Stelle da sein, wo sie sich nicht bedecken. Ziehen wir vom Punkte C eine Gerade nach der Peripherie der beiden Segmente an die Stelle, wo sie sich nicht bedecken, es sei das die Linie C F G, die die Peripherie in F, resp. G schneidet. Da nun alle Radien gleich sind, so müßte C F gleich C G sein, und es wäre ein Teil gleich dem Ganzen, was unmöglich ist. Also ist bewiesen, daß sich die Flächen A B E und A B D vollständig bedecken. Also müssen sie notwendig gleich sein. Aus dieser Figur folgt, daß Bogen A D B gleich ist Bogen A E B, denn sie bedecken sich gleichmäßig."

Die angeführten Beispiele sind charakteristisch, denn so wie es ihm hierin nicht zum Bewußtsein kommt, daß er eine fremde Wissenschaft, die Mechanik, zur Begründung geometrischer Wahrheiten herbeiruft, so ist ihm als Beweis auch ein philosophisches Prinzip willkommen, obwohl er damit ein neues Axiom unvermerkt in die Geometrie einführt. So meint er zu der Forderung, daß zwischen zwei gegebenen Punkten sich eine und nur eine Gerade ziehen lasse: „Die Wahrheit dieses Satzes ist bereits außerhalb dieser Wissenschaft dargetan, denn es ist bereits bewiesen, daß, wenn die Grenzen vorhanden sind, das, was zwischen ihnen liegt, notwendig endlich und begrenzt ist. Da dem so ist, und da jedes Maß hinzugefügt werden kann, so oft es auch bereits hinzugefügt ist, das heißt: jede Linie, die du ziehst, beständig größer gemacht werden kann, so ist klar, daß die Linie verlängert werden kann Schritt um Schritt, bis man zu jenem Punkte kommt. Aber wenn wir nicht annehmen, daß das zwischen Grenzen liegende endlich und begrenzt ist, es wäre aber klar aus dem Wesen der Geraden, daß, soweit sie auch verlängert ist, sie stets endlich bleibt, so wäre es unmöglich, daß wir zu jenem Punkte kommen, sogar wenn wir die Linie ohne Ende verlängern, weil sie ja immer begrenzt bleibt."

Leo übt jedoch nicht an allen Forderungen oder Axiomen des Euklid Kritik, sondern nur an denen, „die nicht selbstverständlich sind", d. h. die ihm nicht anschaulich gewiß scheinen oder umstritten sind.[41]) Das ist erstens die Forderung, daß eine Gerade ins Unendliche verlängert werden kann und zweitens in ganz besonderem Grade des Parallelenaxiom. Zu der ersteren fügt er die Bemerkung: „An der Annahme, daß es möglich ist, eine begrenzte Gerade gleichmäßig und stetig bis ins Unendliche auszuziehen, d. h. daß stets zu der Geraden hinzugefügt werden kann, soviel auch bereits hinzugefügt ist, da sie immer begrenzt bleibt; an dieser Annahme wird gezweifelt. Denn es hat sie bereits der Philosoph[42]) in seinem Buch, das unter dem Namen natürliche Akustik bekannt ist, bestritten. Dort hat er auseinandergesetzt, daß unmöglich eine Linie angenommen werden kann, die größer ist als die Linie, die auf dem alles umfassenden Körper, d. h. der ganzen Welt liegt, denn es gibt keine Linie außer auf einem Körper. Da nun diese Voraussetzung für den Geometer sehr notwendig ist, so müssen wir über diesen gegen sie geäußerten Zweifel nachdenken, und wenn wir finden, daß sie falsch ist, wollen wir sie aufgeben und auf sie nicht die Wissenschaft der mathematischen Dinge aufbauen, wenn die Kraft des Beweises, der für sie erbracht werden kann, auf eine hinfällige Grundlage sich aufbaut, so daß man kommen, gegen sie eine Frage aufwerfen und sie damit erschüttern kann. Wir sagen nun: der Gesichtspunkt, unter welchem der Philosoph diese Annahme bestritten hat, ist der, daß ein Körper notwendig ein Begrenztes ist, wie dort auseinandergesetzt ist. Da nun die Linie stets auf einem Körper liegen muß, so ist notwendig das Maß der Linie begrenzt, will sagen, daß es unmöglich größer ist, als die auf dem größten Körper gezogene gerade Linie. Da dem so ist, müssen wir nachdenken, von welchem Gesichtspunkt aus der Körper notwendig ein Begrenztes ist, d. h. nicht größer sein kann als der Körper der Welt. Darauf sagen wir, daß dies nur insofern von dem Körper notwendig gilt, als er ein natürlicher, wirklich vorhandener Körper ist, wie dort klargelegt ist. Der Geometer aber nimmt die gerade Linie an als unbegrenzt in der H i n z u f ü g u n g, d. h. daß man zu ihr hinzufügen und weiter hinzufügen kann; nicht insofern die Linie auf einem w i r k l i c h e n Körper liegt, sondern insofern sie auf einem m a t h e m a t i s c h e n Körper liegt. Von diesem Gesichtspunkt ist das Fehlen einer endlichen Grenze für den Körper nicht zu widerlegen, wenn er auch immer ein Begrenztes ist. Auch der Geometer macht diese Voraussetzung dort, wo sie zulässig ist, nicht dort, wo sie unmöglich ist. Daher wird unsere Annahme durch jenen Einwand nicht hinfällig. Trotz dieser Annahme gibt der Geometer zu, daß es unmöglich ist, daß etwas, was ein Maß hat, unbegrenzt ist, und weil es wirklich vorhanden ist, ist es notwendig begrenzt. Ich behaupte nun, daß dies jene Annahme, die wir erwähnt haben, gar nicht umstößt; denn wenn der Geometer annimmt, die Linie sei unbegrenzt, so heißt das nicht, daß sie größer sei als die Welt; denn wenn wir auch zugeben, daß die Linie verlängert und weiter verlängert werden kann ohne Ende, so folgt doch nicht daraus, daß eine Linie ihrer Größe nach unendlich ist, denn soweit auch die Linie verlängert wird, sie bleibt immer ein Endliches. Die Annahme der Unendlichkeit, die wir gemacht haben, bezieht sich nur auf die Möglichkeit der Weiterverlängerung, nicht darauf, daß die Linie der Größe nach unendlich ist.“[43])

Den eigentlichen Kernpunkt aber von beiden geometrischen Schriften Leos bildet seine Auseinandersetzung über das Parallelenaxiom. So heißt es in der Einleitung zum zweiten Werke: „Also sprach Levi ben Gerson: Wie wir im ersten Teile des V. Traktates des Buches der Kriege Gottes dargelegt haben, sind wir zu der Stufe einer auf Beweise gestützten astronomischen Theorie der Himmelskörper gelangt. Zur Grundlage dieser Beweise haben wir dort viele von den Voraussetzungen (Axiomen) gemacht, die in dem Buche des Euklid, die „Elemente“ genannt, aufgeführt sind. Ein Teil dieser Grundlagen ist daher aufgebaut auf eine Voraussetzung, die zweifelhaft ist, und zwar auf die Annahme, die Euklid gemacht hat: werden zwei gerade Linien durch eine dritte Gerade geschnitten, und sind die beiden inneren Winkel, die diese auf einer der beiden Seiten bildet, kleiner als zwei rechte Winkel, so werden die Linien sich verlängert auf dieser Seite schneiden.

„Euklid sagt dort, daß der dieser Wissenschaft Beflissene zu jener Annahme seine Zustimmung geben müsse. Damit wollte er andeuten, daß es für ihn keine Möglichkeit gibt, sie mit einem Beweise zu erhärten. Gleichwohl ist sie nicht von selbst bekannt. Sie ist aber eine notwendige Voraussetzung für den Geometer, so daß, wenn sie fällt, viele von den bedeutungsvollsten Sätzen dieser Wissenschaft fallen würden. Deshalb also wollen was in diesem Buche dasjenige ganz zweifellos darlegen, wie wir dort aus dem Bereich dieser Wissenschaft zur Grundlegung benötigt haben. Es ist klar, daß uns diese Forschung Veranlassung geben wird, viele Voraussetzungen zu erläutern, die bereits Euklides oder ein anderer von den Kennern dieser Wissenschaft, soweit ihre Worte zu uns gelangt sind, dargelegt haben; und das, was wir von ihren Worten bringen, das werden wir unter ihrem Namen bringen.[44])

„Diese Voraussetzung ist, so bemerkt Leo ferner im Kommentar, sehr tief; es gelingt ihre Bewahrheitung nicht leicht. Denn es ist nicht der Laienwelt bekannt, daß, wenn die beiden inneren Winkel weniger als zwei rechte betragen, und der eine stumpf und der andere spitz ist, daß dann jene Linien sich schneiden. Es gehört auch nicht zu den elementarsten Erkenntnissen[45]), daß, wenn e i n e Gerade, die zwischen zwei andere fällt[46]), dort auf einer der beiden Seiten zwei innere Winkel kleiner als zwei rechte bildet, daß dann j e d e gerade Linie, die zwischen sie fällt, auf dieser Seite zwei innere Winkel kleiner als zwei rechte macht. Vielmehr erheben sich selbst dem scharfsinnigen Gelehrten, der sich lange und gründlich mit unserer Wissenschaft beschäftigt hat, Zweifel daran. Um wieviel mehr bei Anfängern. Daher die Darlegung des Satzes keine leichte ist. Ferner: in unserer Wissenschaft wird dargelegt, daß man zwei Linien ziehen kann, zwischen denen zu Anfang eine bestimmte Entfernung ist und je mehr „sie sich entfernen“,[47]) desto mehr nähern sie sich, und dennoch treffen sie sich niemals, sogar wenn sie ins Unendliche verlängert werden.[48]) Auch von diesem Gesichtspunkt aus können sich an obiger Annahme Zweifel ergeben,[49]) wenn wir zugeben sollten, daß es bekannt ist von jenen Geraden, daß sie sich einander nähern.

Da nun diese Voraussetzung grundlegend ist in unserer Wissenschaft, wie du aus Figur 29 des ersten Buches und aus den folgenden ersehen kannst, wo aus ihr betreffs der Parallellinien und der Winkelsumme des Dreiecks Folgerungen gezogen werden, so wollen wir für sie einen Beweis erbringen.

Dieser Beweis wird kommen, nachdem wir zuvor die 28 ersten Figuren dieses Buches vorausgeschickt haben, denn bei ihnen bedient sich Euklides dieser Voraussetzung nicht. Jedoch wollen wir zwei bekannte Annahmen vorausschicken. Die eine derselben hat schon Euklides in Figur 8 des fünften Buches erwähnt, nämlich, daß es möglich ist, irgendeine beliebige Gerade[50]) zu vervielfachen, bis sie größer ist als eine gegebene andere Gerade. Diese Annahme ist klar, um so mehr, wenn man das Vorangehende berücksichtigt. Die zweite ist, daß eine Gerade, die (gegen eine andere) geneigt ist, sich der Seite annähert, wo sie einen spitzen Winkel bildet. Das geht aus der Bedeutung des Begriffes hervor, denn wenn wir sagen, sie ist geneigt, so hat das keinen anderen Sinn, als sie nähert sich jener Seite, zu der sie geneigt ist. Daraus geht hervor, daß die Geraden, die unter spitzen Winkeln gezogen werden, sich einander nähern auf derjenigen Seite, da jede sich der anderen zuneigt. Denn das ist eben ein spitzer Winkel, daß die Gerade nach jener Seite sich zuneigt. Ebenso ist klar, daß sie sich auf der anderen Seite entfernen, wie sie auf dieser Seite sich genähert haben. Auch deshalb, weil sie unter stumpfen Winkeln auf der zweiten Seite gezogen sind und jede nach entgegengesetzter Seite wie die andere geneigt ist. Das ist klar und kein Zweifel an seiner Wahrheit.

Ich sage auch, daß es möglich ist, ein gegebenes Maß zu verdoppeln, das Doppelte wieder zu verdoppeln u. s. f., bis man zu einem Maß kommt, das größer ist als irgendein vorgegebenes endliches zweites Maß. Denn wäre das nicht möglich, so wäre das erste Maß in dem zweiten unendlich viele Male enthalten, also das zweite Maß, das endlich vorausgesetzt wurde, unendlich groß.“

Aus dieser Betrachtung folgert Leo den

Satz 1. Im Viereck können weder alle vier Winkel stumpf, noch alle spitz sein.

Denn sonst müßten sich je zwei gegenüberliegende Seiten auf beiden Seiten des anderen Paares gegenüberliegender Seiten einander nähern oder voneinander entfernen, was unmöglich ist.

Indem jetzt die Raute als ein Viereck mit zwei gleichlangen Gegenseiten eingeführt wird, beweist man aus der

Kongruenz der beiden durch eine Diagonale entstehenden Dreiecke den

S a t z 2. In einer Raute sind je zwei gegenüberliegende Winkel einander gleich.

Mit Hilfe dieser beiden Sätze ergibt sich nun:

S a t z 3. Wird der ein Schenkel eines gleichschenkligen Dreiecks über die Spitze hinaus um sich selbst verlängert und der Endpunkt mit der dritten Ecke des Dreiecks verbunden, so ist das entstehende Dreieck rechtwinklig.

B e h a u p t u n g: (Siehe Figur 3) Ist in dem gleichschenkligen Dreieck A B C A C um sich selbst verlängert bis D, so ist A B D rechtwinklig.

B e w e i s: Denn verlängert man das Mittellot C E von B C D um sich selbst bis F, so ist

$$C E B \cong C F A,$$

also der Winkel bei F, übereinstimmend mit dem an E, ein rechter, und E B = F A. Wenn also auch A B = F E erfunden würde, so hätten wir in A B E F eine Raute vor uns, in der nach Satz 2 der Winkel an B gleich dem an F, gleich einem Rechten ist, und unsere Behauptung wäre erwiesen. Daß in der Tat A B = F E, ergibt sich indirekt aus Satz 1.

Gesetzt nämlich, A B wäre größer als F E, so verlängere ich C F und C E bis F' bzw. E', so daß C E' = C F' = ½ A B ist. Dann folgt aus der Kongruenz von △ A F F' und △ B E E', daß jetzt A B E' F' eine Raute ist. Aber die Winkel an F' und E' sind beide spitz, also würde nach Satz 2 das Viereck vier spitze Winkel besitzen, was mit Satz 1 im Widerspruch steht. Aus analogen Betrachtungen folgt aber auch, daß A B nicht kleiner als E F sein kann, also ist unser Satz bewiesen.

Von diesem Satze machen wir eine Anwendung auf das rechtwinklige Dreieck.

S a t z 4. Wird die Mitte der Hypothenuse eines rechtwinkligen Dreiecks mit dessen Spitze verbunden, so ist die Verbindungslinie gleich der halben Hypothenuse.

B e w e i s i n d i r e k t: (Siehe Figur 4) Denn wäre $AC > MA$, als die halbe Hypothenuse, so konstruiere ich $MC_1 = AM$ und erhielte, da $\triangle AC_1M$ jetzt gleichschenklig ist, nachSatz 3 in ABC_1 ein rechtwinkliges Dreieck mit einem rechten Winkel bei C_1. Der Winkel an C_1 ist aber notwendig größer als ein rechter, da er größer ist als der an C, also ist unsere Annahme unmöglich. Entsprechend widerlegt sich die Annahme $AM < MC$.

S a t z 5. Im rechtwinkligen Dreieck betragen die beiden Winkel an der Hypothenuse zusammen einen rechten.

Beweis folgt daraus, daß nach Satz 4 das rechtwinklige Dreieck in zwei gleichschenklige sich zerlegen läßt.

S a t z 6. Die Winkelsumme im Dreieck beträgt 2 R. Beweis folgt für das rechtwinklige Dreieck ohne weiteres aus Satz 5; für das allgemeine Dreieck ergibt er sich durch Zerlegung desselben in zwei rechtwinklige Teildreiecke.

Da der Satz von der Winkelsumme im Dreieck inhaltlich mit dem Parallelaxiom des Euklid identisch ist, so hätte Leo schon jetzt seine Aufgabe als gelöst betrachten dürfen. Um jedoch formal die Forderung auch des Euklid ihrem Wortlaute nach darzutun, fügt Leo noch folgende Sätze hinzu.

S a t z 7. Wenn im rechtwinkligen Dreieck die Hypothenuse und die eine Kathete um sich selbst verlängert und die neuen Endpunkte miteinander verbunden werden, so ist das entstehende Dreieck wiederum rechtwinklig.

Der Beweis ergibt sich aus Satz 4, wenn man (siehe Figur 5) B mit dem Endpunkt D der verlängerten Kathete verbindet.

S a t z 8. Werden zwei Gerade von einer dritten so geschnitten, daß an einer Seite die inneren Winkel kleiner als 2 R sind, und wird von dem Scheitel eines dieser Winkel ein Lot auf die andere geschnittene Gerade gefällt, so schließt das Lot mit der ersten geschnittenen an der Seite, wo die Innenwinkel kleiner als 2 R sind, einen spitzen Winkel ein.

B e h a u p t u n g: (Siehe Figur 6) Wenn die rechts von der Schneidenden liegenden Innenwinkel bei A und B kleiner als 2 R sind, so ist ∢ D A C spitz.

B e w e i s: Denn die Summe der beiden Innenwinkel ist so groß als ∢ D A C plus dem rechten A D B, da der Innenwinkel an B zum Dreieck A B C ein Außenwinkel ist. Also

$$\sphericalangle\ CAD + R < 2R$$
$$\sphericalangle\ CAD < R.$$

S a t z 9. Werden zwei Gerade von einer dritten so geschnitten, daß an einer Seite die Summe der Innenwinkel kleiner als zwei rechte ist, so schneiden sich die beiden Geraden, genügend verlängert, auf dieser Seite.

B e w e i s: (Siehe Figur 7) Die Geraden g_1 und g_2 werden von g_3 so geschnitten, daß links von g_3 die Innenwinkel kleiner als 2 R sind. Fällt man dann von A, dem Schnittpunkt von g_1 und g_3, ein Lot A F auf g_2, so schließt dieses nach 8 mit dem links von g_3 liegenden Teil von g_1 einen spitzen Winkel ein. Wählt man also auf diesem Teile von g_1 einen Punkt B und fällt von ihm aus ein Lot B C auf A F, so wird C auf A F fallen (nicht etwa auf die Verlängerung von A F über A hinaus). Man trage jetzt A C so oft auf A F ab, bis man über F hinaus gelangt nach C_1, und ebenso oft A B auf g_1 bis B_1, so wird A C_1 B_1 ebenfalls ein rechtwinkliges Dreieck und B_1 C_1 parallel zu g_2 sein. Es muß alsdann g_2 verlängert zwischen A und B_1 aus dem Dreieck austreten, da g_2 B_1 C_1 nicht schneiden kann. Also wird g_1 innerhalb A B_1 geschnitten werden, und der Satz ist bewiesen.

Mit der Kritik der euklidischen Axiome hat Leo seine eigentliche Aufgabe erschöpft. Sein Kommentar enthält aber außerdem noch manche wertvolle Bemerkung, durch die in der Tat „vieles ergänzt wird, was im Euklid der Ergänzung bedarf". Vor allem dem Anfänger, den Leo dabei ins Auge faßt, erleichtern diese Noten das Verständnis. In neuerer Zeit hat Max Simon-Straßburg die geometrischen Teile der „Elemente" durch eine deutsche Übersetzung zugänglich zu machen gesucht, die er mit Anmerkungen begleitet. Da ist es für den feinen Blick Leos bezeichnend, daß seine Zusätze sich meist mit denen Simons decken, daß er also an richtiger Stelle die Lücken des Werkes empfunden hat. Die Einzelheiten seien in die Noten verwiesen.[50]) An wenigen Stellen sucht Leo auch neue Beweise euklidischer Sätze zu erbringen, so einen sehr schönen Beweis des Satzes vom Peripheriewinkel. In dem Kommentar zum fünften Buche, also am Schlusse der ersten Schrift, bringt Leo einen ausführliche Behandlung des Begriffes: Verhältnis zweier Größen zueinander, und baut die Gesetze der Bruchrechnung a fundo in elementarer Weise auf. Es berührt sich diese Partie mit den verwandten im Maaße-Choscheb sehr innig.

Souveräner verfuhr Leo in seiner zweiten geometrischen Schrift mit dem Werke Euklids, wie es ihm in der Tibbonidischen Übersetzung vorlag. Er verwebte seine Axiomenuntersuchungen in den Text ein, er schuf eine neue Anordnung des Stoffes[51]), die vielfach von seinem Vorbild stark abwich und veränderte auch die Tibbonidische Terminologie.[52]) Aber leider ist uns zu wenig davon erhalten geblieben, so daß ein Urteil über den Wert der Arbeit nicht möglich ist.

Leo ist der erste selbständige Kommentator Euklids im hebräischen Sprachgebiet; als solcher blieb er auch späteren Generationen bekannt. So erwähnt Josef del Medigo, ein italienischer Jude des 17. Jahrhunderts, „Leos geometrische Werke und seine Noten zum Buche des Euklid."[53])

VII. Lewis Religion.

Noch eine Frage müssen wir berühren, die, obwohl für die Würdigung Leos als Mathematikers ohne Belang, doch an dieser Stelle ihre Erledigung zu finden einen Anspruch hat, weil sie gerade durch die mathematisch-geschichtliche Forschung akut geworden ist, die Frage nämlich, ob Leo zum Christentum übergetreten ist.

Curtze hat den Widmungsbrief, den Leo für den Papst der Übersetzung seiner Abhandlung vorausschickt, wie deren Vorwort zuerst abgedruckt und aus beiden die Folgerung gezogen, daß nur ein Christ so geschrieben haben kann[1]. Auch Cantor nimmt es für wahrscheinlich an, daß Leo zur Zeit der Abfassung Christ gewesen[2], und Günther berichtet den Übertritt als gewisses Faktum, behauptet sogar, er habe nach Annahme der neuen Religion den Namen Leo israelita oder Leo Judäus erhalten[3].

Die genannten Gelehrten kennen den religiösen und philosophischen Schriften- und Gedankenkreis Leos vermutlich nicht, ja sind wie Günther durch ungenaue Quellen (Zedler)[4] falsch über seine Persönlichkeit unterrichtet. Wenn man jedoch in die Gedankenwelt Leos einen Blick tut, so muß der Übertritt, wenn er nicht ein erzwungener gewesen ist, und selbst dann das höchste Erstaunen erwecken. Da die Päpste Clemens V., Benedikt XII. und Clemens VI. aber, im Gegensatz zu dem blinden Glaubenshaß der damaligen Zeit, den Juden Milde angedeihen ließen, zwar durch Unterricht und Belehrung sie zu bekehren hofften, aber Zwangstaufen verabscheuten[5]; da Leo selbst, gewiß nicht ohne Grund, ihre Gnade und Geistesgröße rühmt[6], so wäre nicht abzusehen, was ihn veranlaßt haben sollte, 1342, also im 54. Lebensjahre, den Glauben zu wechseln. Denn daß dieser Übertritt früher erfolgt sein sollte, als Leo noch (bis 1339) das Alte Testament kommentierte, dort das Judentum als ewige Religion feierte[7], den strikten Monotheismus durch die zahlentheoretischen Besonderheiten der Zahl Eins philosophisch zu begründen und ergründen sich bestrebte[8], das Asketentum und Mönchstum als charakteristische Ausprägung des katholischen Gottesdienstes bekämpfte[9], die Ankunft des Messias vorausberechnete und im Gebet herbeisehnte[10], immerwährend auf den Talmud Bezug nahm und sogar einen Kommentar zu den rabbinischen Büchern versprach und in Angriff nahm, das wird selbst Günther unwahrscheinlich dünken müssen. So bliebe denn nur übrig, daß Leo, der bereits eine religiöse Autorität innerhalb seiner Glaubensgemeinschaft geworden war, aus freien Stücken die Religion im vorgerückten Alter verlassen habe, für die er sein ganzes Leben lang geforscht und gewirkt hat.

Denn das dürfte aus dem Früheren unzweifelhaft hervorgegangen sein, Leo ist eine religiöse Natur durch und durch. Alles, selbst seine mathematischen und astronomischen Studien haben in letzter Linie in der Religion ihre Wurzel. Die exponierte Stellung seiner angestammten Religion innerhalb der an Macht erstarkenden Tochterreligion zwingt ihn, sie vor sich und dem philosophischen Zeitgeist, dem auch er unterworfen ist, zu rechtfertigen. Das führt ihn zu der harmonistischen Verquickung gegensätzlicher Elemente, das setzt ihn in einen Gegensatz zu der konservativen Auffassung anderer Glaubensgenossen. Aber nichtsdestoweniger war Leo nie „Skeptiker in Glaubenssachen", war nie mit seinen Stammesbrüdern zerfallen[11]). Ihm fehlte, wie Joel bemerkt[12]), das Organ zum Leugnen und zum Zweifel. Die Göttlichkeit, der Offenbarungscharakter des alten Testaments ist ihm stets eine absolute Gewißheit geblieben. Wahr ist, daß er heftig angegriffen wurde wegen seiner für die Zeit Salomo ben Adrets manchmal verwegenen Auffassungen und Umdeutungen des Schriftwortes. Man denke sich nun, Leo sei Christ geworden. Hätte er seinem Gegner eine stärkere Waffe gegen sich, gegen die philosophische Geistesrichtung überhaupt bieten können, als diesen Übertritt zum Christentum? Hätte ein Isaak ben Scheschet[13]), der wahrlich nicht schonend mit Gersonides umging, sich diese Probe auf das Exempel des verfehmten Rationalismus wohl entgehen lassen? Statt dessen kann seine Glaubenstreue und Frömmigkeit niemand in Zweifel ziehen; gerade sie gaben ja den radikalen Ansichten Leos den Nachdruck und das Gewicht. Wir sehen sogar, daß 150 Jahre später Abraham Zacuto, der Lehrer für Mathematik und Astronomie an der Universität in Salamanca, in dem Geschichtswerk „Sefer Jochasin"[14]), das alle Apostaten mit Chronistentreue aufzählt, sich der Verwandtschaft mit dem Rabbi Levi ben Gerson „über ihm sei der Friede"[15]) rühmt. Diese Überlegungen nehmen der

Annahme von Leos Übertritt alle historische Wahrscheinlichkeit; und die Möglichkeit, daß Petrus von Alexandrien in den Widmungsbrief Dinge hinein interpolierte, die sein des Lateinischen unkundiger Auftraggeber nicht wörtlich diktiert hat, erscheint selbst, wenn das Ganze das Gepräge einer Übersetzung an sich trägt[16]), doch wohl annehmbar.

Leo bezeichnet sich als Israelita und Judäus[17]), Namen, die er das ganze Mittelalter hindurch behielt. Daß er diese erst nach dem Übertritt erhalten habe, hat Günther durch nichts belegt und wird es wohl nicht belegen können. Es ist aber ganz undenkbar, daß Leo als Christ Judäus oder Israelita (resp. Hebräus) genannt worden sein soll. Meines Wissens gibt es keinen Neophyten, der nach der Taufe den Beinamen Jude behalten hätte, was ja auch widersinnig gewesen wäre. Der Syrer Gregorius nennt sich, als er nach dem Übertritt Bischof wurde, Barhebräus, d. h. Judenabkömmling, wahrscheinlich, um durch diesen Namen die Mission zu propagieren[18]). Aber auch diese Bezeichnung dürfte isoliert dastehen. Mir scheint, daß, wenn Leo unter diesem Beinamen, den er mit Abraham Savosarda und anderen gemeinsam führt, sich an den Papst wendet, damit allein schon der Vermutung von seinem Glaubenswechsel jeder Boden entzogen ist.

Doch prüfen wir im einzelnen, auf welche Stellen des Briefes Curtze sein Argument baut. Daß Leo darin „im Namen der ganzen Christenheit dem Papst seinen Gruß entbeut", ist nicht der Fall; im Briefe ist davon keinerlei Andeutung. Daß er dagegen den Papst wegen seiner hohen geistigen Begabung — die auch von Petrarca und Platina gerühmt wird[19]) — als würdig „für den Thron des höchsten Pontifikats" bezeichnet, den Papst, der, wie seine Vorgänger, Leo um seiner wissenschaftlichen Verdienste willen in reichem Maße geschützt und gefördert hatte, ja wenn er ihn sogar als „König der Könige und heiligen Vater und Herrn" anredet, Titel, die dem Papste ex officio zukamen, so ist das für einen aufgeklärten, hochstehenden Mann wie Leo durchaus nicht verwunderlich[20]). Daß er zweitens von dem Jahre „der Fleischwerdung Christi" spricht, beweist absolut nichts.

Man lese die im 5. Abschnitt gegebene Einleitung der Mondtabellen, die er doch als Jude geschrieben hat, und man wird bestätigt finden, daß annum incarnationis nichts weiter als christliche Ära bedeutet, eine Bezeichnung, die bei allen mittelalterlichen Schriftstellern gang und gäbe war.

Drittens aber weist Curtze darauf hin, daß Leo „in einem Gleichnis den Menschensohn und dessen 21tägiges Verborgensein herbeiziehe". Die Stelle des Briefes lautet: et licet predictum secretum iam diu fuit revelatum, ut apparebit inferius, et annotatum hebraeis litteris ... nusquam tamen ordinate translatum fuerat in latinum, sed sic permansit occultum, donec venit, quasi similitudo hominis filii, religiosus vir Petrus de Alexandria ..." 1329 ist nun das liber bellorum dei beendet worden; 1342 erfolgte die Übersetzung. Es war also in der Tat „schon längst in hebräischer Sprache das Geheimnis enthüllt worden". Wie sollen jetzt die 21 Tage, die ganzen drei Wochen, welche vor der Ankunft des Augustiner-Mönches vergingen, aufzufassen sein? In der Zahl 21 erblicke ich lediglich eine Interpolation des Übersetzers. Leo mag in Anlehnung an Dan. 7,13[21]) gesagt haben, es blieb verborgen, bis in Gestalt eines Menschenkindes erschien der fromme Petrus von Alexandrien, und dieser selbst hat, durch die Ausdrucksweise verleitet, zu einem Gleichnis mit dem Verschwinden Christi die Situation benutzt.

Es bleibt jedoch noch eine etwas dunkle Stelle zu erläutern, ich meine die Worte: Leo israelita de Balneolis philosophantium verum(?) christianitatis et totius felicitatis obtentum. Durch eine Bemerkung[21]) wird jedoch diese Stelle verständlich. Christianitas bedeutet in der Sprache mittelalterlich jüdischer Schriftsteller christliche Wissenschaft[22]) — Daß dies richtig ist, ersieht man auch aus dem Anfang des Vorworts, wo es heißt: Instrumenta fuerunt aliqua ad inducendum nos in Christianitatem. — Da nun in Leos Auffassung Erkenntnis und Bildung identisch sind mit Glückseligkeit, so nehme ich die angeführte Stelle in folgendem Sinn: „Den Brief schreibt Leo, der die Wahrheit der Philosophen christlicher Wissenschaft und der gesamten Seligkeit besitzt."[23]) Mich will bedünken, daß zu den Worten dieser

Einleitung er sich gerade durch seine Zugehörigkeit zum Judentum veranlaßt sah. Er will dem Kirchenfürsten sagen: Obwohl anderen Bekenntnisses, bin ich dennoch der von christlicher Seite geförderten Wissenschaft nicht fremd geblieben, da sie auch für mich Grundbedingung der höheren Glückseligkeit ist.

So glaube ich, daß der Beweis für den Übertritt Leos zum Christentum vor einer eingehenden Prüfung nicht Stich halten kann.

VIII. Tod und Nachruhm.

Wir haben die reiche, literarische und wissenschaftliche Tätigkeit Leos oben geschildert; sie drängt sich auf den kurzen Zeitraum von 1319 bis 1344, also auf noch nicht 25 Jahre zusammen. Leos letzte Lebensjahre waren durch die schrecklichen Ereignisse, die über seine Glaubensgenossen hereinbrachen, verbittert und getrübt. Ein wehmütiger Akkord klingt durch seine sonst so starren, rein spekulativen Betrachtungen hindurch. „Die Leiden der Juden Frankreichs, die doppelt so hart waren wie die Knechtschaft Ägyptens“[1]), lassen ihn nur soweit der philosophischen Denkarbeit sich widmen, „als die Not und Mühsal der Zeit es zulassen“[2]). 1242 waren nicht ohne Schuld der Maimonisten zu Paris 24 Wagenladungen von Talmudexemplaren öffentlich verbrannt worden[3]), und bis in die Tage Leos hinein glaubten die Anhänger des Maimonides in der Leidenschaft des Parteistreites, daß in den talmudischen Schriften die philosophische Geistesrichtung bekämpft werde. Leo beschließt, um dies für das Judentum grundlegende Werk vor Vergessenheit und Verkennung zu bewahren, einen umfassenden Kommentar dazu zu schreiben, wie er ihn für die Bibel bereits geleistet hatte. Eine Methodik der talmudischen Bibelauslegung, wie sie in den „13 Deutungsregeln“ ihre charakteristische Formel gefunden hatte, bearbeitete er gewissermaßen als Einführung im voraus[4]). Den ersten Traktat Berachoth muß er noch vollendet haben, denn er weist auf ihn in seinen Schriften hin[5]). Derselbe hat sich jedoch nicht bis in unsere Tage erhalten.

Leo selbst hatte, wie schon erwähnt, in der päpstlichen Residenz ein Asyl gefunden[6]). Auch Clemens VI., der 1342 den Stuhl Petri bestieg, zeigte sich gegen Leo als edlen Freund der Wissenschaften. Überhaupt scheint Gersonides speziell die Achtung christlicher Kreise in hohem Maße genossen zu haben; wissenschaftliche Anfragen werden von fürstlicher Seite an ihn über Themen der Mathematik und Astronomie gerichtet[7]). Und doch scheint ihn die gewitterschwangere Atmosphäre schwer bedrückt zu haben; er möchte seines Lebens nicht froh werden. Er wendet sich eschatologischen Betrachtungen zu. Für das Jahr 1358 will er die Erlösung berechnet haben[8]). Auf Schritt und Tritt spricht sich die Sehnsucht nach messianischer Seligkeit in seinen Schriften aus[9]). Auch der Astrologie widmet er sich mit besonderer Innigkeit; gerade als letzte Gaben seines Geistes liegen zwei Horoskope aus den Jahren 1343 und 1344 vor, von denen er das letzte nicht mehr beenden sollte; der Tod „kam ihm zuvor“[10]). Erst 56 Jahre alt, starb er im April zu Avignon. Er sollte das furchtbare Schicksal nicht mehr erleben, das selbst die Juden der Provence nicht verschonte, das Papst Clemens umsonst von ihrem Haupte abzuwehren bemüht war, als 1348 bei den Schrecken des schwarzen Todes Leiden über sie verhängt wurden, die in der Geschichte ihresgleichen suchen. Der Streit der Talmudisten und Maimonisten Frankreichs wurde in Blut und im Qualm der Scheiterhaufen erstickt. Der Würgengel ging durch die Welt; Tränen bezeichnen seine Spuren; es war eine Gnade der Vorsehung, daß Lewi vorher hinweggenommen ward.

Erst nach seinem Tode entbrannte ganz eigentlich der Streit um seine Lehren und seine Schriften. „Alle bestritten seine Ansichten, niemand seine Bedeutung“.[11]) Sein großes talmudisches Wissen, seine peinliche Frömmigkeit verschafften seinen Worten Ansehen; um so schlimmere Verwirrung konnte daher von seinen Anschauungen ausgehen. So entstanden ihm entschiedene Gegner, die es als Aufgabe betrachteten und betrachten mußten, die Autorität seiner Werke zu erschüttern, damit sie nicht Volkstümlichkeit gewönnen. So führt um 1450 der Minister und Gelehrte Abravanel mit Leidenschaft die Fehde gegen die Theorien Leos, den er als Baal riwi, als seinen Antipoden bezeichnet. So führt Schemtow ben Schemtow mit Ironie die Feder gegen den Kämpfer **für** Gott, dessen Arbeit er als Kampf **gegen** Gott kennzeichnet. Noch Manasse ben Israel, der Sachwalter der Juden vor Cromwell, schließt sich den Gegnern Leos mit Entschiedenheit an[12]).

So erhielt die Lehre Leos innerhalb seiner Glaubensgemeinschaft ein zweifelhaftes Licht. Dem modernen Betrachter ist das völlig begreiflich. Leo wollte eben das Unvereinbare vereinen, das sich diametral Widersprechende harmonisch verbinden. Es war 1546 ein ziemliches Wagnis, das Sefer Milchamoth zu drucken. Ängstlich verwahrt sich der Herausgeber[13]) gegen den Verdacht, als wolle er mit der Veröffentlichung des Lewischen Werkes sich identisch erklären, mit dessen Theorie, oder „daß er gekommen sei, um für Leo ein Fürsprecher zu sein; der göttliche Gelehrte, der in der Philosophie bis zum höchsten emporgestiegen und über das Göttliche zu sprechen gewagt, habe sich ja selber wegen seiner scheinbaren Abweichungen von der Thora verteidigt."

Eigentlich war durch den Charakter der Lewischen Schriften schon von vornherein dafür gesorgt, daß ihr Leserkreis kein allgemeiner werden konnte. Zu ihrem Verständnis bedurfte es viel zu vieler Vorkenntnisse, zu ihrem Studium großer Geduld und Hingebung, denn ihr Verfasser verschmähte die Höflichkeit der Gelehrten. Aber in der Schar derer, die ihn studierten, fand er zu allen Zeiten Bewunderer. „Der Fürst im Reiche des Geistes, der umfassende Weise, der göttliche Philosoph", wie er im Munde der späteren genannt wird, ward in dem Bestreben, seine Religion mit der höchsten Freiheit des Denkens in Einklang zu bringen, doch ehrfurchtsvoll anerkannt[14]). Auch in christlichen Kreisen wurden seine Werke, besonders das liber bellorum dei, berühmt. Das beweisen die vielen lateinischen Übersetzungen, die sie von dieser Seite aus erfuhren[15].) Noch Spinoza schöpfte wertvolle Anregung aus den Lewischen Gedankengängen[16]).

Aber mochte auch die Haltbarkeit seines philosophischen Standpunktes

umstritten gewesen sein, seine Größe auf astronomischem Gebiet fand ausnahmslose und allgemeine Anerkennung. Samuel ben Meir rühmt, was sein großer Zeitgenosse Lewi ben Gerson in bezug auf Tabellen und Nativitäten geleistet habe[17]). Zakut, der Professor der Mathematik an der Universität Salamanca, zitiert rühmlichst das astronomische Werk unseres Leo in seiner Chronik[18]), und die portugiesische Junta, der Martin Behaim angehörte, benutzt die Sinustabellen Leos[19]). Botarel, der Bearbeiter der alfonsinischen Tafeln, rühmt dem Maestro Leon nach, daß er das Ansehen der Judenheit durch die Pflege der astronomischen Wissenschaften bei den übrigen Völkern erhöht habe; er selbst schrieb zu dem Luchoth „des Löwen" einige erklärende Notizen, denn „wenn die Tafeln auch wahr und hoch erhaben in der Forscher Augen seien, so böten sie doch viele Schwierigkeiten dar".[20]) Das ehrende Urteil Picos haben wir als Motto dieser Abhandlung vorausgeschickt; noch an anderen Stellen seiner Disputationen beruft er sich auf Leo Hebräus als den gewichtigen Astronomen und Mathematiker, dem unter den Vertretern der hebräischen Gelehrtenwelt sich nur Abraham Avenare und Savorsarda an die Seite stellen können. Reuchlin preist ihn[21]). Regiomontan hat seine mathematischen Arbeiten studiert und hat aus ihnen mannigfachen Gewinn für seine eignen Forschungen gezogen[22]). Noch zu Keplers Zeiten ist der tractatus quintus bellorum dei ein gesuchtes und geschätztes astronomisches Kompendium[23]). Seine Tabellen werden denen des Alfonso gleichgestellt; so sagt der bereits mehrfach erwähnte Zakut: „Isaak ibn Cid berechnete auf Befehl des Königs zu Toledo mit großer Präzision Tafeln für das Heer des Himmels, und an Genauigkeit und astronomischer Bedeutung wurde nichts Gleiches geschaffen als das Werk Israelis, fundamentum mundi, und das des Rabbi Lewi ben Gerson ... Auf diesen gelten die Worte: Er hat unsere Weisheit und Einsicht den Völkern bewiesen, denn von Aufgang der Sonne bis zu ihrem Niedergang, in Deutschland, Frankreich, England, ganz Italien und Spanien zerbrach man die ersten Tafeln und nahm jene an bis heute und diesen Tag."[24])

Vom 17. Jahrhundert ab tritt allerdings das Andenken Leos nicht mehr sonderlich hervor. Seitdem aber durch Zunz die Aufmerksamkeit auf die Geschichte der jüdischen Wissenschaften wieder gelenkt worden ist, seitdem haben auch Leos Werke wieder liebevolle Beachtung und gründliches Studium erfahren. Vor allem Joel und Steinschneider, auf deren Vorarbeiten auch unsere Abhandlung fußt, haben seinem Namen zu neuem Ruhm und frischem Glanz verholfen.

Auch die moderne Geschichte der Mathematik hat seit Günthers Auffindung der Münchener Handschrift Lewi einen ehrenvollen Platz zugewiesen, hat speziell in der Geschichte der Trigonometrie seine Verdienste hervorgehoben. Ja, vielleicht wird hier sein Andenken am längsten erhalten bleiben, hier man ihm am meisten danken, was er gelehrt; vielleicht wird gerade jener fünfte Traktat des Buches der Kriege Gottes, den seine bisherigen Herausgeber nicht zu drucken für nötig hielten, sich am meisten Bedeutung für die Zukunft bewahren.

Literatur.

1. Munk, S., Mélanges de la philosophie juive 1859, Paris.
2. Joel, M., Levi ben Gerson als Religionsphilosoph, Breslau 1862.
3. Steinschneider, Levi ben Gerson in Ersch und Grubers Enzyklopädie, II. Teil, 43 B., Leipzig 1889.
4. Günther, S., Die erste Anwendung des Jakobstabes zur Ortsbestimmung. Bibliotheca mathematica 1890, S. 73 ff.
5. Steinschneider, Die Mathematik bei den Juden, Bibliotheca Mathematica, Stockholm, Jahrgang 1893—1899, speziell 1897.
6. Renan (Neubauer), Histoire Litteraire de la France. Les écrivains Juifs Français du XIV Siècle, Paris 1893.
7. Günther, S., Der Jakobstab als Hilfsmittel geographischer Ortsbestimmung. Geogr. Zeitschrift, Leipzig 1898.
8. Curtze, M., Levi ben Gerson über Trigonometrie und Jakobstab. Bibl. mathem. 1898.
9. Derselbe, Die Dunkelkammer. Eine Untersuchung über die Vorgeschichte derselben. Himmel und Erde, Berlin 1901.
10. Levi ben Gerson, Sefer Milchamot (liber bellorum Dei). Riva di Trento 1560 (5320). (In zweiter Auflage, Leipzig 1868.)
11. Derselbe, Kommentar zum Pentateuch, Venedig 1547.

12. D e r s e l b e, Kommentar zu den Propheten und Hagiographen in den rabbinischen Sammelausgaben Koheleth Mosche, Amsterdam 1735. Sefer Mikraot Gedoloth sive. Biblia rabbinicia, Venedig 1524—1525.
13. D i e t e r i c i, Fr., Die Philosophie der Araber im X. Jahrhundert. I.—IV. Teil. Leipzig 1876.
14. D e r s e l b e, Die Propädeutik der Araber. Berlin 1865.
15. A b r a h a m, Ibn Esra, Das Buch der Zahl (Sefer Hamispar). Herausgegeben v. M. Silberberg, Frankfurt a. M. 1895.
16. D e r s e l b e, Sefer Haechad, Buch der Eins. Ed. Pinsker, Odessa 1867.
17. N e s s e l m a n n, Algebra der Griechen, Berlin 1842.

NOTEN.

Kapitel I.

[1] Der volle Titel des Buches lautet: ספר מלאכת מחשבת i. e. Opvs Bipartitum, cuius pars I עיר חשבון i. e. Arithmeticam & Algebram, pars II ברורי המדות i. e. Geometriam tradit, auctore R. Elias Gerson Landshutensi cum Censura Amplissmimae Fakultatis Philosophicae Academiae Francofurtanae MDCCLXV. Der obige Titel ähnelt dem des Levischen Lehrbuches der Algebra.

[2] Vgl. Steinschneider: Zeitschrift für Mathem. Suppl. der historischen Abteil. 1880, S. 53.

[3] So hat der Dichter Jehuda Halevi von diesem Gesichtspunkt aus eine Apologie der überlieferten Kalenderrechnung im Kusari versucht. Vgl. Steinschneider: Bibliotheca mathematica 1896, S. 78.

[4] Günther: Die Lehre von der Erdrundung und Erddrehung im Mittelalter bei Arabern und Hebräern. Halle 1877, S. 78, Anm. 2.

[5] Vgl. Steinschneider l. c. 1898, S. 33 ff.

[6] Daselbst S. 35.

[7] Daselbst S. 33.

[8] Daselbst S. 37.

[9] Daselbst 1897, S. 105.

[10] Vgl. Renan, S. 274.

[11] Derselbe ist später aus der päpstlichen Bibliothek zu Avignon nach Paris gelangt. Vgl. Renan, S. 275.

[12] Vgl. Günther: Johann Werner aus Nürnberg in den Studien zur Geschichte der mathematischen Geographie. Halle a. S. 1879, S. 289.

[13] Vgl. Günther: Martin Behaim, Bamberg, S. 12 ff. Vgl. dagegen Günther: Das Zeitalter der Entdeckungen. Leipzig 1905, S. 35 ff.

[14] Dies um so mehr, als erst mit ihm nachweislich die allgemeine Benutzung des Instrumentes in der Astronomie eintrat. Vgl. Schück: Der Jakobstab: Jahresbericht der geographischen Gesellschaft in München 1894—95, S. 106.

[15] Breusings Schriften verzeichnet bei Schück l. c., S. 105.

[16] Vgl. Günther, Bibl. mathem. 1890, S. 76.

[17] Vgl. Bibl. mathem. 1888, S. 32.

[18] Vgl. Steinschneider: Bibl. math. 1889, S. 37. Die gleiche Vermutung schon bei Jakob Bartsch 1662 (Eneström).

[19] Vgl. Bibl. math. 1890, S. 74. Petz: (Mitteilungen des Vereins für Geschichte Nürnbergs. Jahrgang 1888). Urkundliche Nachrichten über den literarischen Nachlaß Regiomontans 1478—1522, S. 260.

[20] Vgl. Bibl. math. 1890, S. 76 ff.

[21] Daselbst 1898, S. 97 ff.

Kapitel II.

[1] In der jüdischen Literatur tritt Lewi meist unter dem Namen Rabbi Lewi ben Gerson oder abgekürzt Ralbag auf. Die christlichen Schriftsteller des Mittelalters nennen ihn Leo Hebreus oder Israelita. Nicht selten finden sich auch die Namen Maestro Leon, worin eine Anspielung auf den ärztlichen Beruf liegen soll (vgl. Renan, S. 242), und Leo de Bagnols, wahrscheinlich nach dem Geburtsort Leos.

[2] Vgl. Grätz: Geschichte der Juden. Leipzig 1890, Bd. 6, S. 306 ff.

[3] Daselbst S. 319 ff. und Bd. 7, S. 28 ff.

[4] Daselbst Bd. 7, S. 234 ff.

[5] Vgl. Renan, S. 241.

[6] Vgl. Munk-Melange, S. 500: „Ce fut la Provence qui fournit presque tous les traducteurs et commentateurs des philosophes arabes usw."

[7] Vgl. Steinschneider: Bibl. math. 1896, S. 111 ff., S. 897 ff., S. 35 ff.

[8] Steinschneider l. c. 1897, S. 14.

[9] Obwohl Renan S. 249 annimmt, daß er „ohne Zweifel" des Lateinischen mächtig war, und Steinschneider (hebräische Übersetzungen, S. 66) diese Meinung zu teilen scheint, so scheint uns doch aus allen Stellen, in denen Levi über zeitgenössische lateinische Werke spricht, unbedingt hervorzugehen, daß er sie nicht zu lesen imstande war. Überall bedauert er, auf Übersetzungen angewiesen zu sein und nicht auf die Originalquellen zurückgehen zu können. (Vgl. z. B. Milchamoth, S. 8 b: „Gemäß dem, was wir gefunden haben, in dem, was uns übersetzt wurde aus den Sprachen der Christen" i. e. dem Lateinischen, Einleitung, S. 2 b, V 3,4 oder V 2,6: „vielleicht wollte dieses der Philosoph hier sagen, denn wir kennen seine eigenen Worte nicht; und vielleicht haben seine Erklärer hier seine Ansicht verfehlt". V 3,6: „Nach der Ansicht des Ibn Sina, soviel uns von ihm berichtet ist.." und andere Stellen). Levi zitiert ferner frühere Aristoteleserklärer (wie Themistius, Alfarabi u. a.) stets nach dem Bericht des Averroes, daher muß er jedesmal seiner Kritik die Entschuldigung beifügen: wenn anders ihre Ansichten uns richtig überliefert sind. Joel spricht daher auch Leo die Kenntnis des Lateinischen ab (S. 5). Vgl. Note 11 zu Kap. III. Steinschneider selbst führt l. c., S. 66, viele Stellen an,

wo Leo seine Unkenntnis des Lateinischen zugibt. Wie sollte man sich sonst erklären können, daß Leo dem Papste von seiner Erfindung nicht „ordinate“ hat Mitteilung machen können, bevor Petrus von Alexandrien die Rolle des Dolmetschers übernahm? (Vgl. Curtze, Bibl. math. 1898, S. 99.)

An 2 Stellen seines Bibelkommentars spricht er vom Arabischen (Joel, S. 5). Jedoch stimmen darin alle Biographen Leos überein (vgl. Steinschneider l. c., S. 66), daß er höchstens durch den Umgang mit einigen Wendungen und Worten des Arabischen vertraut geworden war.

Kapitel III.

1 Vgl. Joel, S. 6, ferner Groß: Gallia Judaica. Paris 1897, Art.: Bagnols. Vgl. ferner: Sefer Jochasin ed. Filipowski. London und Edinburg, A. M. 5617, S. 224. Daselbst wird berichtet, daß Leos Vater Gerson ein Werk: „Thor des Himmels“ verfaßt habe. Daß dieses astronomischen Inhaltes ist, schließe ich aus derselben Quelle, S. 223, wo es mit Israelis: fundamentum mundi zusammengestellt ist.

2 Er soll zu Ibn Esra einen Superkommentar geschrieben haben (Joel, S. 15).

3 Siehe Sefer Milch., S. 5. Daß auch Abraham bar Chijah eine Quelle für Leos mathematische Bildung ist, beweist Sefer Milch. VI 2,4.

4 Siehe Pentateuch-Kommentar, S. 13b. Vgl. Joel, S. 97.

5 Vgl. Kap. IV.

6 Siehe Moreh Newuchim II. 22. Vgl. Grätz IV, S. 308 ff. Maimonides erkennt nur in bezug auf die sublunarische Welt dem Stagiriten unbedingte Autorität zu, nicht in der Erkenntnis des Göttlichen. (Siehe auch Überweg-Heinze: Geschichte der Philosophie. Berlin 1898, S. 239.)

[7] Vgl. Günther: Die Lehre von der Erdrundung usw., S. 84 und 85. Ferner Munk: Le guide des garèès par Moise ben Maimon. Paris 1856. Teil I. S. 185.

[8] Vgl. Steinschneider: Bibl. math. 1897, S. 107, wo ersichtlich ist, daß sich der Papst die von Leo gestellten Horoskope übersetzen ließ. Von vielen ist bezeugt, daß Leo als Arzt tätig war. So von Bartolocci und Isaac Lattes (Renan, S. 242 und 243). Nach letzterem hat Leo auch medizinische Schriften verfaßt, von denen sich jedoch keine erhalten hat. Auch finden sich nur spärliche Andeutungen in den vielen uns überkommenen Werken Leos, daß er mit den Begriffen der Heilkunde vertraut und beschäftigt war.

[9] Vgl. Joel, S. 8.

[10] Vgl. S. 33 ff.

[11] Vgl. Renan, S. 255. Es ist hier sehr bezeichnend, daß Leo nicht die Analytica des Aristoteles selbst kritisiert, sondern nur die Darstellung, welche Averroes von dem Werk des Griechen gibt. Ja, Leo vermutet, daß Averroes die Gedanken des Aristoteles entstellt habe, er sei jedoch infolge seiner mangelnden Sprachkenntnisse nicht imstande, seine Vermutung zu prüfen.

[12] Steinschneider: Bibl. mathem. 1897, S. 107.

[13] Vgl. Renan, S. 260 ff. Der Kommentar über die Himmelszeichen findet sich im Kodex Hebr. 36 zu München und enthält interessante Theorien über die Erscheinungen von Donner und Blitz.

[14] Vgl. Joel: Zur Genesis der Lehre Spinozas. Breslau 1871, S. 40 und 41.

[15] So sagt Levi selbst am Schluß des V. Teiles des Sefer Milchamoth: Aus der Erweiterung des ursprünglichen Planes solle die Verzögerung und der Widerspruch erklärt werden, daß das Werk 1321 und 1329 beendet sei.

[16] Leos Bibelkommentare enthalten auch eine erstaunliche

Fülle von mathematischer und astronomischer Belehrung. Wie Joel (Levi ben Gerson als Religionsphilosoph, S. 17) scharfsinnig bemerkt, resultiert dieses aus der eigentümlichen Denkweise Leos. Die Bibel will nach seiner Meinung den Menschen zur vollkommenen Glückseligkeit führen; das höchste Glück des Menschen liegt aber in der geistigen Erkenntnis. So genügt es Leo nicht, wie Maimonides den Nachweis zu führen, daß die biblischen Lehren mit der philosophischen Wahrheit und den Ergebnissen der Wissenschaft nicht im Widerspruch stehen, vielmehr muß die Bibel alle Resultate der Spekulation und der Forschung selbst enthalten und dem Kundigen vermitteln können. Also muß auch die Astronomie und Mathematik, die ja wesentliche Bestandteile von Leos Gedankenwelt sind, aus dem Bibelwort herauszulesen sein.

Es wäre gewiß interessant nachzuforschen, wie weit es Leo gelungen ist, das Wissen seiner Zeit aus der Bibel heraus zu interpretieren. In der Geschichte der Exegese dürfte Leos Standpunkt ganz einzig dastehen.

[17] Vgl. Kap. VII.

Kapitel IV.

[1] Vgl. Sefer Milchamoth: Einleitung, S. 2a.

[2] Vgl. Joel, S. 4 und 5.

[3] Im Kommentar de sensu et sensibili bespricht er Träume als eine Art Prophetie. Siehe Renan, S. 261. Vergl. Sefer Milch. II 4: „Viele Male, besonders in Zeiten, wo ich einsam forschte und grübelte über hohe Dinge und tiefe Betrachtungen, kam es mir im Traume vor, als würde nach der Deutung jener tiefgründigen Probleme gefragt. Und ich antwortete mir wahrhaftige Antworten, die ich am Anfang nicht wußte und an die ich nicht gedacht hatte bis zu jener Zeit."

[4] Vgl. Renan, S. 272.

[5] Aus der Inhaltsangabe des fünften Buches von Sefer Milch., Kap. 98 (bei Renan, S. 293).

[6] Daselbst, S. 296, Kap. 46. Hebräisch lautet jene Stelle:

נשייר עדת המעיינים שלא ימהרו לחלוק על דברי הקודמים אם לא אחרי עיון רב ושקידה רבה.

[7] Vgl. Sefer Milch., Einleitung, S. 2 b.

[8] Sefer Milch. l. c., S. 2 a.

[9] So sagt er bei der Besprechung des in Josua, Kap. 10,12 ff. erzählten Wunders von dem Stillstand der Sonne: er sei weit entfernt, seine Deutungsweise anderen aufdrängen zu wollen, die den Bericht wörtlich fassen; sei er doch überzeugt, daß jene nur die Größe und Allmacht des Schöpfers durch das Wunder erhöht glauben.

[10] Vgl. Renan, S. 255.

[11] Daselbst S. 255.

[12] Siehe Sefer Milch. l. c., S. 3 a. Darin folgt er dem Vorbild des Averroes, welcher in der destructio dem Algazel vorwirft, daß er „die Scheidung zwischen Wissenden und der Menge aufgegeben und spekulative Fragen in allgemeinverständlicher Form behandelt habe". (Überweg-Heinze l. c., S. 239.)

[13] Siehe Maimonides: Jad Hachasaka, (Hilchoth Teschubah V a) Berlin 1862, S. 49 a.

[14] Sefer Milch. IV, Kap. 5 und 6.

[15] So wird am Schluß jedes Buches von Sefer Milch. nachgewiesen, daß die vorgetragene philosophische Ansicht mit der biblischen und talmudischen Tradition übereinstimme. Im folgenden (in der Einleitung zu den Mondtabellen, S. 33) findet sich hierfür ebenfalls ein interessantes Beispiel.

[16] Vgl. im folgenden den von uns edierten Euklidkommentar und Kap. VI.

17 Siehe Sefer Milch., Buch fünf, Kap. 2.

Kapitel V.

1 In dieser Weise charakterisierte Wilhelm Förster in seiner Vorlesung über die Geschichte der mittelalterlichen Astronomie (im Sommersemester 1908) die Bedeutung jenes Zeitabschnittes.

2 Die Formel hat Günther zuerst aufgestellt, und zwar lautet sie

$$\text{chorda A B} = \frac{2\,h}{\sqrt{h^2 - c^2}}$$

mit Berücksichtigung des Umstandes, daß Leo den Tangens nicht kannte (vgl. Abschnitt VI). Die Größe $h^2 - c^2$ wird semidiameter aequata, die Chorda A B chorda aequata genannt. Siehe Curtze: Bibl. math. 1898, S. 111, Kap. 5.

Leo selbst schildert seinen Stab mit folgenden Worten (Renan l. c., S. 275):
Fiat unus baculus cum superficiebus planis et rectis et in uno capite illius ponatur una tabella, que aliqualiter sit cornuta, cuius alterutum cornu experientie tempore sume (so korrigiere ich nach Curtze l. c., S. 108), alterutrum in oculum collocetur. Et fiant multe tabelle diversarum quantitatum, perforate in medio, superficies rectas habentes, per quarum foramina intrare possit baculus antedictus, et sit altitudo earum super baculum aliquantulum depressior altitudine oculi .... et linee a centro oculi procedentes tangant ... extremitatem ... tabelle et terminentur ad coelum.

In der Arbeit: „Der Jakobstab als Hilfsmittel usw.“, S. 157, führt Günther ungefähr 10 verschiedene Namen für den Baculus auf, den er zu den nicht zahlreichen Ruhmestiteln des „Mittelalters“ rechnet. Diese Mannigfaltigkeit der Bezeichnungen deutet darauf hin, wie weit verbreitet und zu wie vielfachem Gebrauch die Erfindung Levis benutzt war. In derselben Quelle wird folgendes interessante Zitat des Petrus Ramus angeführt (S. 159):

Instrumentum perantiquum est, et vulgo baculus Jacobi dicitur, tamquam a Sancto patriarcha illo jam olim inventus sit ... Arabes tandem ut Rabbi Levi, sed proximis temporibus Germani Regiomontanus, Vernerus imprimis excoluerunt.

3 Aus dieser Einfachheit des Instrumentes erklärt sich, daß das Grundprinzip desselben sich in anderer Form schon in antiken Zeiten nachweisen läßt. So bei Archimedes (vgl. Günther: Astronomische Geographie, Leipzig 1902, S. 48). Auch auf ganz primitiven Instrumenten kehrt bei Naturvölkern das Prinzip des Baculus wieder. (So Schück: Der Jakobstab bei den Arabern. Zeitschrift: Die Natur, Juli 1891). Leo selbst hat natürlich von Vorgängern seiner Idee nichts gewußt; er war auch der Erste, der die a l l g e m e i n e Verwendbarkeit des Instrumentes erkannte und durchführte.

4 Das Gedicht על המקל „An den Stab" ist von Edelmann (Diwre chefez, London 1853, S. 7) ediert; die ersten 3 Zeilen des hebräischen Originals bilden ein Akrostichon auf den Namen Lewi.

5 In Anspielung auf das prophetische Bild (Secharia 11,7) von dem „Stab der Verwundung" und dem „Stab der Lieblichkeit". Wörtlich übersetzt, heißt es: „Was nennt ihr mich Stab der Verwundung, mir gebührt doch der Name Stab der Lieblichkeit."

6 Die Worte, mit denen Jesaias 11,1 den Messias feiert; sie beweisen, wie überzeugt Leo von der gleichsam weltbeglückenden Bedeutung seines Stabes war.

7 Anspielung auf das Kreuz. Leo war also Jude. Man vergleiche Kapitel VII.

8 Vgl. Numeri IV, wo erzählt wird, daß die Geräte des Tempels auf Stäben getragen wurden.

9 Gemeint sind die Holzscheite unter dem Brandopfer.

[10] Hierin erkennt Renan einen Hinweis auf den Namen „Stab Jakobs“.

[11] Vgl. hierzu Curtze l. c., S. 111 gegen Günther: Bibl. math. 1890, S. 77.

[12] Infolgedessen ist der wirkliche Sehwinkel kleiner als der berechnete.

[13] Diese Einteilung, nach indischem Vorbild getroffen, nach welchem auch Albattani seinen Gnomon einteilt (siehe Braunmühl: Geschichte der Trigonometrie, S. 51).

[14] Schücks Ansicht l. c., S. 106, daß Leo die Anwendung des Stabes zum Bestimmen der Sonnenhöhe nicht kannte, ist dadurch widerlegt.

[15] Alle diese Angaben fußen auf der eingangs erwähnten Arbeit Curtzes: Bibl. math. 1898, S. 99 ff.

[16] Siehe die Inhaltsangabe des Levischen Werkes, Kap. 8, bei Curtze l. c., S. 98.

[17] Mir ist ganz unverständlich, wie Renan l. c., S. 277 sagen kann: „on ne trouve jamais sous la plume de Lévi מקל ou מטה“

[18] Siehe Renan l. c., S. 274.

[19] Siehe Steinschneider: Bibl. mathem. 1897, S. 36.

[20] Der Jacobstab von A. Schück, Jahresbericht der geographischen Gesellschaft zu München 1894—95.

[21] Für das folgende bildet der eingangs erwähnte Aufsatz Curtzes über die Geschichte der Dunkelkammer die Grundlage.

[22] Vgl. Kempf: Die Mondtheorie des Ptolemäus.

[23] Curtze: Bibl. mathem. 1898, S. 99.

[24] Das Gedicht an den Stab hat auch keine Anspielung auf diesen Namen.

[25] Auch Porta (magia naturalis, Napoli 1558), der zuerst die Sammellinse für die Dunkelkammer eingeführt hat, kennt deren Anwendung zur Finsternisbeobachtung, die er jedoch nicht so deutlich wie Leo beschreibt. Vgl. Curtze: Himmel und Erde 1901, S. 299.

[26] Vgl. Note 41 dieses Kapitels.

[27] In der hebräischen Zeitschrift Mimisrach umimaaraw (herausg. v. Brainin), Jahrg. 1897.

[28] l. c., S. 278 ff.

[29] Vielleicht im Gegensatz zu dem alphonsinischen Ausspruch: Wenn Gott ihn zu Rate gezogen hätte, hätte er den Bau des Himmels einfacher gestaltet. Vgl. R. Wolf: Gesch. der Astronomie, München 1877, S. 79.

[30] Nämlich aus dem 5. Element, während die sublunarische Welt aus den aristotelischen 4 Elementen sich zusammensetzt.

[31] So erklärt Leo auch die Stelle (Genesis 2, 19): „Adam nannte alle Wesen m i t N a m e n“, d. h. er erkannte ihre Eigenschaften und ihr Wesen.

[32] Vgl. Kap. 3, S. 19.

[33] Die folgende Partie mag als Beispiel dienen, wie Leo als Exeget den „Nutzen“ jedes biblischen Berichtes oder Gebotes zu ermitteln sucht.

[34] Es sei hier im Interesse des folgenden noch ausdrücklich darauf hingewiesen, daß, wie die beiden letzten Sätze zeigen, Leo als Jude seine Tabellen geschrieben haben muß.

[35] Zum Beispiel in dem Werk des Alkandrinus. Vergl. Steinschneider: Zeitschrift der deutsch-morgenländischen Gesellschaft, Bd. 18, S. 144 ff. und 154 ff. Ferner Katalog der Münch. Handschriften, S. 33.

36 Leo fühlte wohl die Schwierigkeit, seine Astrologie biblisch zu rechtfertigen, obwohl er an einen streng naturwissenschaftlichen Zusammenhang der Gestirne mit ihren Wirkungen glaubt. Dies um so mehr, als Maimonides eben vom biblischen Gesichtspunkt die Astrologie bekämpft hat.

37 Vgl. den Kommentar Leos zur Stelle (Genesis 1, Vers 14): „Zu Zeichen", damit sind gemeint die Wirkungen, die geordnet (gesetzmäßig) ausgehen von den Himmelskörpern auf diese niedere Welt, über die die Sterne herrschen. Ähnlich zitiert Dieterici aus den Abhandlungen der lauteren Brüder (Propädeutik, S. 74): „Die Sterne sind himmlische Könige, Stellvertreter Gottes in den Sphären; sie üben auf das unter dem Mond Befindliche feine Kräfte aus usf."

38 Siehe den Kommentar Farissols, eines Schülers des Gersonides, zur Stelle: „Die Gesetze", das heißt die Ordnung in der Einrichtung der Sphären und Gestirne und ihrer Wirkungen und was fließt aus ihrem „Blick" auf die Erde; „oder setzest du ihre kraftvolle Wirkung auf die Erde", die sie ausüben unablässig mit großer Gewalt?

39 Nach Schück soll Leo die epcyklische Bewegung des Mondes vollständig geleugnet haben (l. c., S. 129). Ich glaube jedoch, daß diese Stelle, aus der jene Ansicht offenbar hervorgeflossen ist, nur bedeutet, **das Maß** der Exzentrizität oder das Größenverhältnis von Epicykel und Deferens ist ein anderes, als man bisher annahm.

40 Diese Stelle sagt allerdings, wir mußten eine neue Mondtheorie aufstellen, nicht nur die alte quantitativ modifizieren. Jedoch hat allem Anschein nach Leo zur Erklärung der Anomalien der Mondbewegung doch keine anderen Mittel als Hipparch und Ptolemäus versucht.

41 Diese letzte Bemerkung scheint Leo erst nachträglich hinzugefügt zu haben; denn, da die Radix der Tabellen das Jahr 1320 ist, so war an ihn der Auftrag zu ihrer Ab-

fassung offenbar vor 1321, also vor der ersten Beschäftigung mit seinem Hauptwerke ergangen. Es heißt auch im Kapitel 99 des letzteren (siehe Renan, S. 293) adunabimus tabellas, quas fecimus ad petitionem christorum nobilium, was deutlich beweist, daß das Tabellenwerk als ein fertiges dem Hauptwerke einverleibt wurde.

42 Das sind eben die Elemente der Zeitgleichung.

43 Die Tabellen sind nach folgenden Zyklen angelegt: zunächst einem Zyklus von angenähert 8, dann von 69 mal 8, dann von 40 mal 69 mal 8, dann von 28 mal 40 mal 69 mal 8 = 618 230 Jahren; genauer umfaßt die vierteilige Tabelle einen Zeitraum von 618 565 Jahren 156 d. „Von da an erfolgt alles periodisch‘.‘

44 מחקר שלם, eine vollständige Untersuchung, eine typische Wendung bei Leo, der sich immer zum Ziel setzte, להשלים החקירה, die von Vorgängern begonnenen Untersuchungen bis in ihre letzten Einzelheiten zu verfolgen und ihre Gedanken wirklich zu Ende zu denken. Vgl. die ersten Worte seines Euklidkommentars.

45 Der jüdische Kalender teilt die Stunde in 1080 Chelakim.

46 Ein Terminus, den ich leider nicht zu deuten vermag. מעלה heißt Aszension (auch Grad, Stufe) und hier wird zwischen der konstanten Aszension מ׳עומדת und der wachsenden מ׳צומחת unterschieden.

47 Vgl. S. 105, Note 34. So bemerkt auch Steinschneider (Magazin für die Wissenschaft des Judentums, Jahrgang 1889, S. 141, Anm.) „das Wort הגשמה Inkarnation kommt allgemein in der Bedeutung von christlicher Ära vor“.

48 d. i. Orange. (Vgl. Steinschneider: Bibl. math. 1897, S. 104.)

49 Vgl. Pico: Disputationes IX, 11. „Sed nec illud praeterundum, quod Proclus et Ptolemäus negat apogeum et

epigeon solis moveri. Est autem quod appellant barbare augem et oppositum augis(?) recentiores volunt, quos retaxat hebreus Leo etc."

[50] Vgl. bei Renan die Kapitel 84—86, S. 292.

[51] Renan l. c., S. 278. [51a] Daselbst S. 287.

[52] Vgl. Sef. Milch. V, III am Schluß.

[53] Fundamentum mundi. Ed. Goldberg und Rosenkranz, Berlin 1848. Buch II. S. 29. Kap. 9.

[54] Bei Renan, Kap. 39—44, S. 289.

[55] Die Zahlen geben das Kapitel an, aus dessen Überschrift die Angabe entnommen ist.

[56] So auch Pico: disputationes: Leo hebreus inferiori cuidam sphaerae, non superiori eum motum refert acceptum (VIII, 1).

[57] Das folgt aus der Vergleichung der hebräischen und lateinischen Überschrift zu Kap. 28. Die erstere lautet: wie die gegenseitige Bewegung der Sphären gemäß ihrer astronomischen Beschaffenheit zu erklären ist. Die letztere: zwischen den Sphären muß ein Mittelstoff angenommen werden. Über diesen handelt ausführlich das Kapitel 2 vom 2. Teil des 5. Buches, wo die Eigenschaften dieses Mittelstoffes in ähnlicher Weise vor physikalischen Angriffen gerechtfertigt werden, wie mut. mut. heute die Annahme des Äther.

[58] In dem die schleifenförmige Planetenbahn als Resultante mehrerer einfacher kreisförmiger Bewegungen aufgefaßt wird.

[59] Wir bemerken bei dieser Gelegenheit: Die Übersetzung des Petrus ist, wie die Vergleichung der beiden Inhaltsangaben zeigt, ein Auszug aus dem 4. bis 12. Kapitel des Sefer Milchamoth.

[60] Siehe Genesis, Kap. 24, 63. Analoge Stellen sind S 33 b, 201 b, 213 b der Venediger Ausgabe.

[61] Ähnlich seine Erklärung zu Numeri Kap. 23, 23 (S. 197), wo er lehrt, daß auch Israel als Volk nicht den Gestirnseinflüssen unterworfen ist: „Weissagung fußt auf dem Einfluß der Gestirne: Israel unterstehet aber nicht ihrer Herrschaft, solange Israel gut ist."

[62] Vgl. in dieser Beziehung den interessanten Aufsatz von Förster: Himmelskunde und Weissagung in Himmel und Erde; Jahrg. 1901.

[63] Im 2. Teil des 5. Buches des Sef. Milch., Kap. 6.

[64] Und bei der Reibung von gleichartigen Stoffen aneinander wird, so ist offenbar seine Ansicht, keine Wärme erzeugt.

[65] Leo sagt am Schluß: „Vielleicht hat das Aristoteles gemeint." Seine mangelnden Sprachkenntnisse hindern ihn nur, auf das Original zurückzugehen.

[66] Joel: l. c. S. 66. Einige von diesen 27 Fragen sind folgende: Warum empfängt der Mond sein Licht von der Sonne und hat kein Eigenlicht?

Warum ist die Längenbewegung bei den meisten Wandelsternen eine wechselnde, d. h. bald beschleunigt, bald verzögert?

Warum ist die anomalistische Bewegung beim Merkur schneller als bei der Venus, während ihre Längenbewegung gleich ist?

Wozu dient die Milchstraße? usw.

[67] Kepler: Epistolae. Johannus Ramus Johanni Keplero: „Utinam apud rabbinos invenire posses tractatum quintum defensionum Dei."

Kapitel VI.

[1] In den Manuskripten dieses Werkes zu Paris und im Vatikan führt es den Titel: ספר המספר Buch der Zahl

gleichnamig mit dem im folgenden erwähnten Werke des Ibn Esra. (Vgl. Renan, S. 257.)

2 Vgl. Silberberg: Sefer Hamispar, Frankfurt a. M. 1895; Note 67, 87, 113, 116, 118, 121—128.

3 Siehe Cantor: Gesch. der Mathematik, Bd. II, S. 769.

4 S. Luzzato erklärt allerdings Leos Stil für „elegant und beredt". (Siehe Steinschneider: Magazin für die Wissenschaft des Judentums, Jahrgang 1889, S. 155.)

5 Siehe Steinschneider: Bibliotheca mathematica: Die Mathematik bei den Juden, § 30 und § 36.

6 Seine erste Erwähnung findet sich im X. Jahrh. im Kommentar zum „Buch der Schöpfung". (Siehe Steinschneider l. c. 1897, S. 35.)

7 d. h. Buch der Inhaltsberechnung und der Geometrie, ediert Magyar: Zsido-Szemle, Budapest 1903, mit ungarischem Kommentar.

8 Leo hat auch an anderer Stelle Ibn Esra als seinen Lehrer bezeichnet. (Siehe Kap. III. Vgl. Joel, S. 103 ff.)

9 So findet sich beispielsweise für multiplizieren das unrichtige כפל (eig. verdoppeln) und ערך (eig. zuordnen) neben הכות, das im ersten Teil ausschließlich angewandt und arabisches Lehnwort ist. (Vgl. Nesselmann, S. 495); für Summe נחבר neben מקובץ und נקבץ; für Wurzel שרש neben צלע (Seite) und יסוד (eig. Grundlage).

10 Der Ausdruck שטח entspricht dem Epipedos, צלע dem Pleura des Euklid (Ed. Heiberg, S. 187). Merkwürdig ist, daß die Bezeichnung Stereos für Produkt aus drei Faktoren von Leo nicht nachgebildet ist. Hierfür, wie für ein Produkt aus einer noch größeren Anzahl von Faktoren fehlt Leo ein geeigneter Terminus. Er hilft sich durch den Begriff (מספר מורכב) der „zusammengesetzten Zahl".

[11] Vgl. Nesselmann l. c., S. 156.

[11a] Vgl. Ibn Esra: Sefer Hamispar Ed. Silberberg, S. 24 u. 25; ferner S. 102. Vgl. auch Dieterici: Propädeutik, S. 14.

[12] Siehe Cantor II, S. 314.

[12a] Siehe Cantor I, S. 619 ff.

[12b] Siehe Cantor I. S. 736 und viele andere Stellen.

[13] Vgl. Überweg-Heinze: Gesch. der Philosophie. 8. Aufl. Bd. II, S. 230 ff.

[13a] Er findet sich bei den Pythagoräern (Cantor I, S. 158), bei Mohammed ibn Musa (das. S. 716), bei Beda-Eddin (das. S. 784), endlich bei Boethius (das. S. 435).

[13b] Z. B.: Die Weltentwicklung geschieht in 9 Stufen entsprechend den 9 Ziffern des dekadischen Systems. (Dieterici: Philos. der Araber, S. 163 (164.) Den Einern entsprechen die Gattungen alles Seins, z. B. der 4 die 4 Elemente (das.). (Siehe auch Ibn Ersa: „Buch der Zahl“ am Anfang.)

[13c] Vgl. Cantor an den soeben angeführten Stellen.

[13d] Deutoron 6, 4.

[14] Nach Rodet (Actes de la société philosophiques B. VIII 1878, S. 13) und Steinschneider (Ibn Esra als Mathematiker) gebührt dem Ibn Esra das Verdienst, das dekad. System bei den Juden eingeführt zu haben. Nesselmann (S. 494) macht jedoch auf die masoretische Angabe einer Verszahl 5845 durch das Symbol החמה aufmerksam, das nur verstanden werden kann, wenn den Masoreten das Positionssystem und die dekadische Schreibung von Zahlen mittels hebr. Lettern geläufig war. (Daß das מ störend, statt des ד auftritt, erklärt sich aus dem Bestreben, ein mnemotechnisches Hilfsmittel in dem Worte החמה zu schaffen, während

החרה keinen Sinn ergeben hätte.) Dann würde bereits im 8. und 9. Jahrhundert das Dezimalsystem bei den Juden Eingang gefunden haben.

[14a] Vergl. Günther: Geschichte der Mathematlk, Leipzig 1908, S. 281.

[15] Vgl. über ihn Steinschneider: Bibl. math. 1897, S. 104.

[16] Nach Braunmühl, Gesch. der Trigonometrie, Leipzig 1900, Bd. 1 und Cantor, Gesch. der Mathematik, Leipzig 1907, Bd. 1, Seite 412 ff, 657 ff., 795 ff.

[17] Vgl. Fundamentum mundi, Buch 1, die letzten Kapitel. Ferner die vorzügliche Einleitung von Cassel, S. V.

[18] Braunmühl, S. 19 ff.

[19] Siehe Braunmühl, S. 23, Anm.: „Man muß sich wundern, daß er nicht auf den Gedanken kam, die halben Sehnen einzuführen", obwohl er gezwungen war, die Sehnen doppelter Bögen anzuwenden, um aus den Verhältnissen zweier Sehnen die ihrer Summe resp. Differenz zu finden.

[20] Nach einer Bemerkung Försters in der oben erwähnten Vorlesung. Vergl. Note 1 zu Kapitel V.

[21] Siehe Braunmühl, S. 82. Es unterliegt wohl kaum einem Zweifel, daß Ptolemäus und Djabir Leos Vorgänger und Lehrer in der Trigonometrie waren. Nach Djabirs Vorbild stellt Leo die Trigonometrie als etwas Selbständiges seinem astronomischen Traktat voran, hat also wie dieser das volle Bewußtsein, eine von der astronomischen Anwendung unabhängige mathematische Sonderdisziplin zu behandeln. Nach Braunmühl hat Djabir auch zuerst die Bemerkung gemacht, daß aus der Kenntnis der Winkel eines ebenen Dreiecks die des Verhältnisses seiner Seiten folge, ohne jedoch diese Entdeckung in einer Formel wie der des Sinussatzes klar auszusprechen.

[22] Die Bezeichnung Sagitte oder Pfeil für sinus versus, die im Mittelalter als die sogenannte sarazenische häufig

angewandt wird (Braunmühl, S. 84, Anm.), ist bei den jüdischen Mathematikern besonders beliebt. Ibn Esra verwendet sie in Jesod Hamispar (Steinschneider: Abraham Ibn Esra als Mathematiker. Suppl. der hist.-liter. Abt. der Zeitschr. für Mathematik 1880, S. 116) und im Sefer Hamispar Ed. Silberberg, S. 76/77 ff. Sie kommt auch in dem ältesten mathematischen Werk hebräischer Zunge, in „Mischnath Hamidoth" vor (Ed. Schapira in Zeitschrift für Mathematik, Suppl. d. histcrisch-liter. Abteil., herausgegeben von Cantor, Jahrg. 1880, S. 16 und 54), jedoch natürlich nicht in der spezifisch trigonometrischen Auffassung der Sagitte als Funktion des Winkels. (In Paranthese sei hier bemerkt: Wenn Steinschneider gegen Schapira das Auftreten dieser „technischen" (Bibl. mathem. 1894, S. 39) Bezeichnung als Indizium für das späte Alter jenes Werkes anführt, so ist das aus dem von uns zuletzt geltend gemachten Grunde nicht stichhaltig. Wenn man anschaulicherweise ein Stück der Kreisperipherie als „Bogen", die Verbindungslinie ihrer Endpunkte als „Sehne" bezeichnet, so folgt von selbst für das Mittellot dieser Sehne die Charakteristik als „Pfeil". Das Auftreten dieses Ausdruckes kann daher nicht verwundern, zumal, wie betont, jede Beziehung auf den sinus versus fehlt.)

23 Im Fundamentum mundi heißt Sinus בקע i. e. die Hälfte (Siehe Fürst: Hebräisches Lexikon, Leipzig 1876), und Kosinus תשלום בקע i. e. Ergänzung der Hälfte (der Ausdruck בקע findet sich sonst selten; nur zweimal im Pentateuch, Gen. 24, 22, Exod. 38, 26 in der prägnanten Bedeutung von „die Hälfte des Schekels" (der Tempelsteuer). In ähnlicher Weise wurde dieses Wort dann für den sinus als die Hälfte der Sehne in Anwendung gebracht. Welche Bezeichnung Leo selbst für den sinus hat, kann nur aus der Untersuchung des hebräischen Originals seines Hauptwerkes erschlossen werden. Im Münchner Katalog 1875, S. 181 (die 2. Auflage München 1895, S. 214) bemerkt jedoch

Steinschneider: „Cod. hebr. 386 bringt an 5. Stelle: לוח הקשתות והמיתרים הישרים המחוצים והמתרים הנזורים מועתק מכ״י החכם ר׳ ר׳ל׳ב׳ג׳ ז״ל Tabelle der Bögen und der geraden, gehälfteten Sehnen und der zurückweichenden(?) Sehnen, dem Manukript des gelehrten Rabbi Levi ben Gerson, s. A." Die Worte: מיתרים הישרים המחוצים (i. e. die geraden, gehälfteten Sehnen) sind offenbar nichts anderes als Sinusse, und mit den dort zitierten Tabellen die Sinustabellen Leos gemeint.

24 Siehe Braunmühl, S. 19.

25 Die Tabellen nach Günthers Angabe (Bibl. math. 1890, S. 76) dadurch ausgezeichnet, daß sie neben den Winkeln die Supplementwinkel aufführen.

26 Bei Bestimmung der Schattenlänge des Gnomon, der Anomalie und Exzentrizität des Mondes kommt der Almagest zur Berechnung ebener Figuren, und zwar wird nur das rechtwinklige Dreieck betrachtet. (Braunmühl l. c., S. 26.)

27 Ebenso bei Ptolemäus (Braunmühl l. c., S. 27). Denn bei Berechnung der Größe des bei einer Sonnenfinsternis vom Monde verdeckten Teiles der Sonnenscheibe wird Ptolemäus darauf geführt, einen Winkel aus den 3 Seiten zu berechnen. (Almagest ed. Heiberg, S. 516 ff.)

28 Ich korrigiere arcus diametri bei Curtze (S. 106) in arcus duplati.

29 Vgl. Cantor: Gesch. der Mathem., Bd. II, S. 112.

30 Als dessen Fortsetzer Leo zu gelten hat. So Cantor l. c. I, S. 780.

31 Ausführliches über Leos Trigonometrie bei Braunmühl, S. 104 ff.

[32] Bibliotheca mathematica 1897, S. 103 u. 104.

[33] Den Cod. hebr. 36 haben Steinschneider (Katalog der hebr. Handschriften der Hof- und Staatsbibliothek zu München 1895) sowie Schapira (Supplement der historisch literar. Abteilung der Zeitschrift für Mathematik 1880, S. 7 ff) ausführlich beschrieben. Diese Sammlung ist nicht von einer Hand geschrieben, offenbar auch nicht zu einer Zeit angelegt. Die Euklidübersetzung des Moses Ibn Tibbon, Mischnath Hamidoth, Ibn Esras Werke und einiges andere bildeten den Grundstock. Später wurden mit einer anderen Schrift andere Teile, wie der Maasse Choscheb, die Kommentare des Alfarabi und obiges Fragment Lewis eingefügt. Der mangelnde Raum, der dem zweiten Schreiber zur Verfügung stand, zwang ihn, viele Partien des Maasse Choscheb auszulassen und dessen letzte „Pforte" mitten zwischen anderen Abhandlungen auf einer freien Seite niederzuschreiben. Daher erklärt sich, daß alle später nachgetragenen Teile unvollständig und lückenhaft ausfielen.

[34] Ed. M. Curtze, Leipzig.

[35] Für dies Fragment bildet das Parallelenaxiom nur den Anlaß, nicht den Inhalt.

[36] Renan (S. 257) hat das Wort Tischboreth falsch gedeutet; verführt vielleicht durch den Anklang an שבר i.e. Bruch, übersetzte er es mit Algebra. So wurde diese Abhandlung ein Bruchstück „einer größeren Komposition der Algebra" worüber Curtze (l. c.) mit Recht seinen Spott ergießt. Nach Renan (. 79) hat auch Apollonius von Pergä in seinem Werke über die Kegelschnitte ein „algebraisches" Buch hinterlassen.

Es sei ferner bemerkt: Viele Partien der ersten Schrift hat Leo in die zweite übernommen. Es ist aber nicht anzunehmen, daß die letztere nur eine Bearbeitung der ersteren ist. Denn während das erste Werk nur „das im Euklid ergänzen sollte, was der Ergänzung bedürftig war", so ist das zweite als ein in sich abgeschlossenes Lehrbuch gehalten, das den Euklid überflüssig macht.

[37] Vielleicht auch, daß Leo solche Gründe für den Anfänger zu subtil hielt.

[38] Derselbe Beweis bei Geminos. (Vgl. Note 49.)

[39] Darauf ist wohl zu achten, daß Leo sagt: „es gehört nicht zu den Dingen, die selbstverständlich sind". Im folgenden werden wir sehen, daß Leo auch nur gegen solche Axiome sich wehrt, deren Inhalt er nicht für selbstverständlich hält. Man erkennt Leos eigenartige Geistesveranlagung gerade in dieser unkritischen Behandlungsweise der Axiome deutlich wieder. Vgl. Note 43.

[40] Gemeint ist natürlich Aristoteles.

[41] Vgl. hierzu die Worte von Helmholtz (L. Königsberger: H. v. Helmholtz 1903, II, S. 128): „Die Größen sind denkbar entweder von der Art, daß fortgesetzte Teilung auf Teile führt, die nicht weiter in gleichartige zerteilt werden können (aggregierte Größen), oder daß keine Grenze der Teilung existierte (stetige Größen). Ein logischer Widerspruch liegt in der unendlichen Teilbarkeit nicht, denn diese soll nur als möglich gedacht, nicht wirklich ausgeführt werden, wozu allerdings eine unendlich lange Zeit nötig sein würde; ebensowenig in dem Gedanken eines stetigen Wachsens durch unendlich viele unendlich nahe Stufen." Ähnliche Gedanken finden sich auch im Maasse Choscheb, wo Buch II im Anhang über die Vergrößerung der Zahl gesprochen wird.

[42] Leider aber ist kein Name in dem Torso erwähnt, sonst hätten wir einen wertvollen Aufschluß über Leos Quellen erhalten.

[43] Hebräisch: מושכלות הראשונות. Das sind die Grundbegriffe, die selbstverständlichen Voraussetzungen und Vorbegriffe alles Denkens und Wissens. Solche sind z. B. die Kenntnis der Addition der Zahlen von 1 bis 10, wie Leo am Beginn des Buches II, Pforte 2 vom Maasse Choscheb sagt.

44 So ist die wörtliche Übersetzung statt: die zwei andere schneidet.

45 So im Hebr., statt: je weiter man sie verlängert.

46 Asymptoten.

47 Zwei Gerade könnten sich unbegrenzt nähern, ohne sich zu schneiden.

48 Leo hat keinen besonderen Terminus für Strecke im Gegensatz zur unbegrenzten Geraden. Beide heißen קו.

49 Betreffs der Definition des Punktes bemerkt Leo: פ״א דבר מצבי d. h. er drückt eine reine Ortsbeziehung, keine räumliche aus (Simon, S. 25 Note 21.

Betreffs Leos Satz über den Durchmesser des Kreises vgl. Simon, S. 33 Note 5.

Der Satz, daß alle rechten Winkel gleich sind, auch bei Geminos u. a. (Simon, S. 33, Note 5).

Zu Buch I, Satz 24 bringt Leo die Ergänzungen, die bei Euklid fehlen, in genau entsprechender Weise, wie Simon es andeutet, mit Zuhilfenahme von Satz 21 des Euklid und gibt außerdem einen zweiten Beweis.

Zum allgemeinen Pythagoras, Buch 2, Satz 13 bemängelt Leo den Ausdruck: „spitzwinkliges Dreieck", weil der Satz auch für das allgemeine Dreieck gilt, sofern nur von dem Scheitel eines spitzen Winkels die Lotfällung vorgenommen wird. Er trägt dann die Fälle nach, wo die Höhe außerhalb des Dreiecks liegt bzw. mit einer Kathete zusammenfällt. (Analog Simon, S. 75.)

Bei den Sehnensätzen (Buch III, Satz 7) ergänzt Lewi den Satz: von einem Punkte innerhalb des Kreises lassen sich nur je zwei gleich Strecken bis zur Peripherie ziehen zu beiden Seiten der kleinsten Verbindungslinien dahin, daß dasselbe auch zu beiden Seiten der größten Verbindungslinie gelte und folgert, daß daraus der Satz 9 indirekt beweisbar sei: gehen von einem Punkt innerhalb des Kreises mehr als zwei gleiche Strahlen bis zur Peripherie, so ist der Punkt das Zentrum (genau wie Simon, S. 84).

Zu Buch III, Satz 20 (bei Levi Satz 19,) dem Satz von den Peripheriewinkeln (vgl. Simon z. St.) bringt Leo von Euklid als selbstverständlich übergangenen Fall, daß der eine Schenkel des Peripheriewinkels ein Durchmesser ist. Zu dem euklidischen Beweis für den Fall, wo der Zentriwinkel außerhalb des Peripheriewinkels liegt, bemerkt Leo (siehe Fig. 8 auf Taf. III): „Und wenn uns jemand sagen würde, daß dieser Beweis erst vollgültig ist nach Erledigung von Figur 5 des V. Buches und daß bis jetzt nur feststeht, daß Gleiches von Gleichem subtrahiert Gleiches ergibt, so können wir es auch von diesem Gesichtspunkt aus beweisen. Denn: tragen wir im Punkt A von A D den Winkel E D C an und erhalten D A F, so ist $\sphericalangle$ D A F doppelt so groß als $\sphericalangle$ D A C; mithin sind die Winkel D A C und C A F gleich. Tragen wir an C A in A Winkel C A B an, so daß wir C A G erhalten, so ist $\sphericalangle$ G A F = $\sphericalangle$ B A D. Da nun $\sphericalangle$ E D B = 2 . $\sphericalangle$ D A B, so ist Winkel E D B gleich der Summe der beiden Winkel D A F und G A F. (Subtrahiert man also von den gleichen Winkeln E D C und D A F diese gleichen Teile), so ist der Restwinkel B D C gleich dem Restwinkel B A G. Nun war aber Winkel B A G gleich dem Zwiefachen des Winkels B A C, also ist $\sphericalangle$ B D C = 2 $\sphericalangle$ B A C q. e. d.“ Zu Satz 25 (resp. 24) desselben Buches, der die Konstruktion des Kreises aus einem Segment behandelt, trägt Leo einen Beweis nach, da die von Euklid gegebene Konstruktion auf die Anschauung gebaut ist. (Analog Simon, S. 93.)

Zu Satz 33 (resp. 32): Konstruktion des Segmentes, das gegebenen Peripheriewinkel faßt, beweist Leo, daß selbst im Falle des stumpfen Winkels Tangentenlot und Sehnenmittellot sich schneiden.

Zu Satz 36 (resp. 35), dem Potenzsatz, erbringt Leo den Beweis für den von Euklid angeblich übergangenen Spezialfall, daß die Sekante durch des Zentrum geht, und spricht den im Euklid implizite enthaltenen Satz aus: das Rechteck, gebildet aus den Sehnenabschnitten, ist für alle durch einen Punkt gehenden Sehnen gleich. (Vgl. Simon, S. 97.)

Zum Schluß bemerken wir, daß Leo in einer Anmerkung zu Satz 31 dieses Buches für Tangente den interessanten Terminus קו המשש (eigentlich die tastende Gerade) in Anwendung bringt.

[50] So folgt auf dei Erklärung des Winkels bei Leo sofort der Satz: alle rechten Winkel sind gleich, sowie die Sätze über Neben- und Scheitelwinkel, während bei Euklid sich die Definition des Kreises und der geradlinigen Figuren anschließen und die Nebenwinkel usw. erst an viel späterer Stelle behandelt werden.

[51] So heißt Fläche bei Ibn Tibbon פשוט (abgeleitet vom rabbinischen התפשט sich ausbreiten), bei Lewi שטח, was sich allgemein eingebürgert hat; Scheitelwinkel heißen bei ersterem זויות מתנגדות -einander gegenüberstehende Winkel (eigentlich feindliche Winkel), bei letzterem glücklicher זויות מקבילות. (Der Ausdruck ist entlehnt aus Exod. 26,5.)

[52] Vgl. Steinschneider: Hebr. Übersetzungen, S. 508 und Renan, S. 257, der Tischboreth natürlich wieder mit Bücher über Algebra übersetzt. (Vgl. Note 36.)
Die doppelte Bezeichnung „geometrische Werke und Noten zum Euklid" stützt die Annahme, daß Leo ein größeres geometrisches Lehrbuch außer dem Euklidkommentar verfaßt hat.

Kapitel VII.

[1] Biblioth. math. 1898, S. 101.

[2] Geschichte der Mathematik, Bd. II, im Vorwort, S. IV.

[3] Geschichte der Mathematik bis zu den Zeiten des Descartes (Sammlung Schubert), Leipzig 1908, S. 232.

[4] Günther: Martin Behaim, S. 64.

[5] Siehe Joel, S. 8. Klemens V. ließ z. B. in der Akademie Hebräisch lehren. Klemens VI. trat offen bei der An-

klage der Brunnenvergiftung für die Juden ein. Siehe Grätz: Geschichte der Juden, Bd. VII.

6 In dem gedachten Widmungsbrief.

7 Kommentar zum Pentateuch, S. 251: „Die Thora ist gegeben für alle Folgezeiten bis in die Ewigkeit. Dieses ist ein Grundprinzip, es ist zugleich eine Denknotwendigkeit, denn es ist von Gott keine Willensänderung denkbar."

8 Daselbst, S. 252.

9 Daselbst, S. 171 b.

10 Vgl. hierüber das folgende Kapitel VIII.

11 Wie Günther l. c. mit Berufung auf Zedler angibt.

12 Joel l. c., S. 3 und 4.

13 Vgl. für die literarischen Nachweise das folgende Kapitel.

14 Ed. Filipowski, S. 222 u. ff.

15 Eine Formel, die man dem Abtrünnigen versagte.

16 Und dies ist doch das einzige Moment, das Curtze l. c. geltend zu machen hat.

17 So in der Überschrift: Explicit tractatus magistri leonis Judaei de Balneolis, habitatoris Auryace (siehe Renan, S. 275 aus dem Pariser Manuskript.)

18 Vgl. Überweg-Heinze: Gesch. der Philosophie II, S. 228.

19 Siehe die diese Päpste betreffenden Artikel in Ersch und Gruber.

20 Wenn man einen Begriff haben will von der weitherzigen, toleranten Auffassung Leos, so lese man Zuntz: Gesch. der Literatur, S. 381 ff., wo es u. a. heißt: Leo kennt

keinen Unterschied zwischen jüdischen und nichtjüdischen Frommen. Nur Tugend und philosophische Erkenntnis ist Vorbedingung für das ewige Leben.

21 Hierauf hat mich Herr Isaac Kahan zu Leipzig freundlichst aufmerksam gemacht.

22 Analog dem hebräischen חכמת יון (griechische Weisheit), was bis z. St. die Wissenschaft im Gegensatz zur Theologie bezeichnet. Vgl. Steinschneider: Bibl. math. 1895, S. 99.

23 Dabei ist obtentum (wie obtinens) partizipial gefaßt.

Kapitel VIII.

1 Siehe Leos Kommentar zu Levit. 26, 30, eine Stelle, auf die schon Jochasin aufmerksam macht.

2 Einleitung zu Sef. Milch., S. 2.

3 Siehe Stern: Grundriß der Gesch. der Juden, Berlin 1908, S. 43, und Grätz: Bd. VII, S. 97.

4 Diese wurden unter dem Titel שערי צדק „Thore der Gerechtigkeit“ in Jerusalem 1883 (5644) wieder gedruckt.

5 Vgl. Pentat.-Kommentar, S. 207 a. Isaac Lattes behauptet sogar, daß er den ganzen Talmud kommentiert habe. (Renan l. c., S. 243.)

6 Renan, S. 241.

7 Vgl. unsere Bemerkungen zu Leos Werk: De numeris harmonicis im Kapitel VI c.

8 Siehe Kommentar zu Daniel, Kap. 12.

9 Besonders ergreifend am Schluß des Kommentars zum Pentateuch.

10 Siehe Steinschneider: Bibl. math. 1897, S. 107 und Ersch und Gruber Art. Levi ben Gerson, S. 299. Daselbst

wird aus dem „Prognosticon magistri Leonis Hebraei de conjunctione Saturni et Jovis anno dom. 1345“ zitiert: „Magister Leo morte preventus anno Christi 1344 die 20 mensis aprilis circa meridiem.“

[11] Steinschneider: in Ersch und Gruber, S. 300.

[12] Vgl. Grätz: Gesch., Bd. 8, S. 332; Bd. 10, S. 77 ff; Steinschneider l. c. und Magazin 1889, S. 148 und 149; Joel, S. 12 und 13.

[13] Vgl. das Vorwort des Herausgebers, das bezeichnenderweise auch bei der Wiederauflage mit abgedruckt wurde.

[14] Siehe z. B. die überschwengliche Lobrede von Isaac Lattes bei Renan, S. 243. Andere Belege siehe in der Jewish Encyclopedia Art. Levi ben Gerson. Ferner Joel, S. 11.

[15] Schon sein Erstlingswerk über den logischen Schluß ist ins Lateinische übertragen worden. Ebenso seine Kommentare zu Averroës. (Renan, S. 256.) Die letzteren ließ ihr Übersetzer Jacob Mantino 1521 zu Venedig drucken. (Renan, S. 259 und 260.)

[16] Vgl. Joel: Zur Genesis der Lehre Spinozas, S. 40 ff.

[17] Vgl. Steinschneider: Bibl. math. 1818, S. 8.

[18] Ed. Filipowski, S. 221.

[19] Siehe Schück: Der Jakobsstab, S. 129.

[20] Vgl. Steinschneider: Zeitschrift Mimisrach Umimaaraw, Berlin 1897, der als Einleitung zu den Luchoth einige Zitate Botarels bringt.

[21] Siehe Joel, S. 9.

[22] Vgl. Günther: Gesch. der Mathematik, S. 296 ff.

[23] Vgl. Note 72 des Kap. V.

[24] Sefer Jochasin, S. 221.

Leo Hebreus

De numeris harmonicis

nach

Cod. Basiliensis F. II. 33

zum ersten Male
ediert.

Vorwort.

Die hier zuerst veröffentlichte zahlentheoretische Abhandlung Lewis ist der berühmten Handschriftensammlung Cod. Bas. F. II. 33 entnommen. Über den Anlaß ihrer Abfassung und ihre historische Bedeutung gibt die vorstehende Biographie nähere Auskunft. Ihr Autor hat sie ohne Zweifel hebräisch niedergeschrieben, um sie alsdann für den Bischof Philipp von Vitry ins Lateinische übertragen zu lassen. Im Manuskript nimmt die Arbeit nur drei engbeschriebene Folioseiten ein, die aber, zum Teil verwischt und unleserlich und mit zahllosen Abbreviaturen durchsetzt, der Entzifferung große Schwierigkeiten entgegensetzten. Im ganzen glaube ich jedoch die richtige Deutung des Textes gefunden zu haben.*)

*) Eine erste Anleitung gab mir in dankenswerter Weise Herr Bibliothekar Dr. Hennig in Leipzig.

In Christi incarnationis[1]) anno 1342 nostro opere mathematico iam completo[2]) fui requisitus a quodam eximio magistrorum in scientia musicali sc. a magistro philippo de bitriaco de regno francie, ut demonstrarem unum suppositum in predicta scientia[3]) sc: omnium numerorum armonicorum[4]) quilibet 2 numero distinguntur praeter istos 1 et 2, 2 et 3, 3 et 4, 8 et 9. armonicum autem numerum sic describit: armonicus numerus est, qui et quelibet ejus pars praeter vnitatem per equa 2 vel 3 continuo vel vice versa usque ad ipsam vnitatem findi potest. Sunt igitur continui[5])

1, 2, 4, 8 . . . .
et 1, 3, 9, 27 . . . .
et vice versa 6, 12, 19 et 24 . . . .

et ei parere desiderans volo in hoc loco libri nostri hoc principium demonstrare. Sed quia tales numeri vel sunt de specie continentie proportionalium 2^a [6]) ut primi, vel de specie continentie proportionalium proportione 3^a ut secundi, vel ex specie productorum ex ductu unius prime specieï in unam secunde ut tertii, sub aliis verbis theoremam demonstrabo sub istis scilicet.

Omnium numerorum continentie proportionalium proportione 2^a et continentie proportionalium proportione 3^a et ex iis mutuo productorum quilibet 2 numero distinguntur exceptis istis: 1 et 2, 2 et 3, 3 et 4, 8 et 9. Quia si hoc verum non esset aut invenirentur aliqui alii duo aut predictis de numero continuorum sub speciebus predictis equales aut sola unitate distincti, consequentia ambo patet falsa, ergo et antecedens consequentiis probatis[7]) scilicet falsitatem consequentium demonstrabo.

Ad cuius demonstrationis faciliorem doctrinam quedam vocabula suppono. Primo: numeri prime specieï numeri duplicationis vocentur, sed numeri triplationis vocentur numeri specieï secunde, tertie autem numeri ex duplicatione et triplatione producti. Item unitatem vocamus gradum primum in prima specie et secunda, et primum numerum immediate eum sequentem vocamus secundum gradum et tertium numerum tertium gradum et sic ad infinitum de singulis. Item gradum secundum, 4[um], 6[um], 8[um] et sic de singulis aliis gradus pares vocamus et reliquos impares. Et hoc de vocabulis.

1[a]. Quilibet numerus duplicationis est par.

2. Quilibet numerus triplationis est impar.

3. Quilibet numerus ex duplicatione et triplatione productus est par.

4. Nullus numerus duplicationis potest ab alio quam a duplicationis numero numerari et omnes eum precendentes specieï ejusdem numerant ipsum et hoc solum per numerum ejusdem specieï. Et similiter: nullus triplationis numerus potest ab alio quam a triplationis numero numerari et omnes. Exemplum prime, quia quilibet ex ductu parium per unitatem vel parem resultat ut 2, 4, 8, 16 et cet. Exemplum secunde, quia quilibet ex ductu imparis per unitatem[7a]) vel imparem generatur ut 3, 9, 27 et alii. Ratio tertie, quia quilibet ex ductu (imparium per unitatem vel imparem generatur ut 3, 9, 27, quilibet ex ductu)[7b]) paris per imparem generatur ut 6, 12, 18 et cet. Probatio etiam, quod hoc totum patet per Euclidem. Et ex hoc sequitur etiam, quod nulli numeri duplicationis possint per imparem numerum numerari.

5. A quovis numero triplationis unitate subtracta, medietas residui est equalis aggregato omnium numerorum omnium graduum specieï ejusdem precedentium.[8])

6. Quilibet numerus duplicationis et triplationis gradus imparis est quadratus.

7. Quorumlibet duorum numerorum triplationis aggregatum et par.

8. Quorumvis [trium][9] numerorum aggregatum est impar.

Primum patet per 38 noni Euclidis cum aliquo studio, secundum etiam est necessarium per Euclidem, tertium probabo: sint duo dati numeri ab, bc
et a numero bc unitas bd abscindatur, remanet numerus dc par, et est notum, quod numerus ad est par; sequitur, quod numerus ac est par, quod volubamus probare. Et hinc est notum, quod quicunque numeri triplationis pares[10]) vniuntur, faciunt parem numerum aggregatum ex eis. Quartum probabo. Sint dati numeri ab, cd et aggregatum ex ab cd est par per 4^{am} et impar additur ei, totum sequitur impar, quod vol. prob.

9. Cujusvis numeri imparis gradus triplationis et numeri immediate sequentis speciei ejusdem aggregatum est numerus quadratus et numeratur per 4.

Sit a numerus imparis gradus, cui · additur b, numerus sequens; quia a per 6^{am} est quadratus et b est ter, quia a multiplicatus per 3 est b, sequitur quod ab sit quadratus 2a[11]), quia a est quadratus per 6^{am} et quia 4 etiam est numerus quadratus per 6^{am}. Sequitur, quod proportio a ad ab sit talis qualis est proportio numeri quadrati ad numerum quadratum. Sed a est quadratus, ergo sequitur, quod ab est quadratus, et quia ab continet quadratum a, sequitur quod ab numeratur per 4[12]). Ergo cuiusvolumus numeri triplationis imparis gradus et numeri immediate sequentis ejusdem .speciei.

Et hinc sequitur, quod si duo numeri triplationis se immidiate sequentes aggregentur, aggregatum numeratur per 4, quia ipsum aggregatum est equale[13]) quater numero. Et hinc etiam sequitur, quod si plures numeri pares[14]) triplationis continui aggregentur, aggregatum ex omnibus per 4 numeretur, quia aggregatum quorumcunque duorum continuorum eorum numeratur per 4 et per hanc consequentiam sequitur, quod aggregatum ex omnibus per 4 numeretur.

10. Quorumlibet quattuor graduum consequentium triplationis aggregatus numeratur per 5 et **8**[15]) et etiam aggregatum quotlibet[16]) graduorum speciei predicate numeratur per 4.[17])

Sint dati gradus triplationis a, b, c, d. Naturaliter, qualem proportionem habet unitas ad 9, qui est tertii gradus, talem habet a ad c et b ad d. Sequitur, quod qualem habet 1 et 9 simu ad 1, talem habet a et c simul ad c et talem habet b et d simul ad b. Sequitur ergo ac sit decies a et bd sit decies b, sequitur ergo abcd simul sint dicies ab. Sc. per 9 am ab simul est quater a, sequitur ergo abcd simul est quater ab, sicut 40a. Sed 40 numeratur per 5 et 8, sequitur ergo abcd simul numeretur per 5 et 8 et similiter hinc[18]) aggregatum quorumlibet 4 graduum consequentium speciei triplationis. Et per consequentiam aggregatum quorumvis continuorum duorum specieï numeratur per 4, quod volubamus.

11. Omnis numeri numerati per 8, quarta est par.

12. Nullus numerus par est alicui numero impari vel vnitati equalis.

13. Nullus numerus impar est alicui alteri numero pari equalis.

14. Nullus numerus impar est alicui alteri numero impari vel unitati equalis.

Probatio prime: quod numerus 8 numerat ipsum, ipse habet octavam partem, que pars duplata est quarta pars ejus. Sed omnis numerus (duplicationis)[19]) duplatus potest dividi in duas partes equales et omnis talis est par. Sequitur ergo etiam pars dati numeri est par quod volubamus. Probatio secunde: quod vnitate distinguntur ad minimum. His demonstratis probabo continuorum[20]) predictorum oposita esse vera et primo primum videlicet, quod:

nulli duo numeri de genere predictorum sint equales.

Dissertation 55—56. 24. 1. 10. W.

15. Nullus numerus duplicationis est alicui numero ejusdem specieï vel vnitati equalis.

16. Nullus numerus triplationis est alicui alteri numero ejusdem speciei vel vnitati equalis.

17. Nullus numerus productus ex duplatione et triplatione et alicui alteri numero ejusdem speciei equalis.

Probatio prime: quod omnes sunt pares per 1^{am}, qui non sunt nec [inter][21] se nec vnitati equales per 12^{am} et 13^{am}; secunde: quia omnes impares per 2^{am}, qui non sunt nec [inter] se nec vnitati equales per 14^{am}; tertie: quia sunt pares per 3^{am}, qui non sunt equales per 12^{am} et 13^{am}.

18. Nullus numerus duplicationis est alicui numero triplationis equalis, vnitate sola primo utriusque gradu excepto qui non est numerus.

19. Nullus numerus duplationis est alicui numero ex duplicatione et triplatione productus equalis.

20. Nullus numerus triplationis est alicui numero ex duplicatione et triplatione productus equalis.

Probatio prime: quia omnes primi sunt pares per 1^{am} et omnes secundi sunt impares per 2^{am}, qui non sunt equales per 12^{am}. Ratio secunde: quia nullus prime speciei numeratur per imparem p. 4^{am}, et quilibet secunde speciei per parem et imparem numeratur, quia ex iis productus [est] et in eas vice versa dividitur ut probavi. Ratio tertie: quia nullus prime specieï numeratur per parem per 4^{am} et quilibet secunde speciei per parem [et imparem, ut] in precedentibus demonstratum est. Vice versa, quia omnes prime sunt impares per 2^{am} et omnes secunde pares per 3^{am}, qui non sunt equales per 12^{am}. Patet ergo ex sufficienti divisione et mutua comparatione numerorum predictorum ad invicem primum continuorum oppositum fore verum: sc. quod nulli 2 numeri de genere predictorum sint equales q. v. p.

Nunc autem restat probare oppositum continuorum secundum: quod nulli duo numeri de genere predictorum sunt sola vnitate distincti exceptis superius notatis sc. 1 et 2, 2 et 3, 3 et 4, 8 et 9.

21. Nullus gradus numerorum duplicationis, primo gradu et secundo exceptis, est a quovis alio gradu speciei ejusdem sola unitate distinctus.

Nullus gradus numerorum triplationis a quovis alio gradu speciei ejusdem sola vnitate est distinctus.

22. Nullus numerus ex duplicatione et triplatione productus est a quovis numero ejusdem speciei sola vnitate distinctus.

Probatio prime: quod omnes, vnitate excepta, sint numeri pares per 1^{am} qui dualitate ad minimum distinguntur per 15^{am}. Ratio secunde: quia quilibet eorum — includo vnitatem large loquendo de numero — sint numeri impares per 2^{am}, qui dualitate ad minimum distinguntur per 14^{am}. Probatio tertie: quod omnes pares per 3^{am}, qui dualitate ad minimum distinguntur per 14^{am}. Et est alia demonstratio specialis, qua demonstratur, quod quilibet duo numeri speciei istius sex[22]) ad minimum distingantur, sed ista demonstratio brevis sufficiat.

23. Nullus numerus duplicationis est a quovis numero ex duplicatione et triplatione productus sola vnitate di-distinctus.

Sit a numerus duplicationis et b numerus ex duplicatione et triplatione productus, et ponitur quod b numerus sit productus ex ductu d numero duplicationis in e numerum triplationis. Si d numerus est major numero a vel ei equalis, habetur propositio. Et ponitur, quod numerus a sit major numero d. Necessarium est per 4^{am}, quod numerus d numeret numerum a per numerum duplationis. Et ponitur, quod numeret ipsum per f. Ex ductu d in e provenit b; ex d ducto in f provenit a; sequitur f non est equalis e, vero distingebitur ab eo per unitatem ad minimum p. 12^{am}, quia unus est par et alius est impar. Sequitur ergo, quod numerus b productus ex ductu d in e non sit equalis numero producto ex ductu d in f, vero ab eo distingebitur per numerum provenientem ex ductu d in differentiam[23]) e et f. Qui numerus proveniens non est minor numero d, cum data differentia non sit vnitate minor sed numerus d est ad minimum vniarius, cum sit speciei duplicationis. Ergo numerus proveniens ad minimum est vniarius, ergo numerus a ab numero b non sola vnitate distinctus, q. v. p.

24. Nullus numerus triplationis est a quovis numero ex duplicatione et triplatione productus sola vnitate distinctus.

Sit a numerus triplationis et b numerus ex duplicatione et triplatione productus. Et ponitur, ut supra, quod b sit productus ex ductu c numero duplicationis in d numerum triplationis. Si numerus d sit major numero a vel equalis, certum habetur propositio. Et ponitur, quod numerus d sit minor numero a. Necessarium est per 4^{am}, quod numerus d numeret numerum a per numerum triplationis et ponitur, quod numeret ipsum per e. Ex ductu d in c provenit b, ex ductu d in e provenit a. Sequitur, c distingebitur ab e per vnitatem ad minimum, quod c est par et e impar per 2^{am} et 3^{am}. Sequitur, quod numerus b, productus ex ductu d in numerum c, non sit equalis numero a producto ex ductu numeri d in numerum e qui numerus proveniens est ad minimum 3, quia data differentia est ad minimum vnitas et numerus d est ad minimum 3, ergo a distingebitur ab b adminimum tribus. Sequitur, quod non sit ab eo sola vnitate distinctus q. v. p.[24])

25. Nullus alius numerus duplicationis est a quovis alio numero triplationis sola vnitate distinctus exceptis secundo gradu duplicationis et secundo triplationis, preterea secundo triplationis et 3^0 duplicationis, preterea 3^0 triplationis et 4^0 duplicationis.

Quod si hoc non esset verum vel aliquis alius numerus triplationis sola vnitate esset major aliquo alio numero duplicationis vel sola vnitate subtracta a numero triplationis residuus esset numerus duplicationis, quod est falsum. Vel aliquis alius numerus duplicationis sola vnitate sit major aliquo alio numero triplationis, vel etiam sola vnitate addita numero duplicationis aggregatum esset numerus triplationis[25]) quod est falsum.

26. Sola vnitate subtracta a quovis numerorum triplationis existentium in gradibus paribus, residuum non est numerus duplicationis.

Sit numerus triplationis ab, qui est impar per 2^{am}; a quo subtrahitur db vnitas, remanet numerus ad par. diviso per medium in puncto c, est notum per 5^{am}, quod numerus ac est equalis aggregato omnium graduum precedentium ab; quod aggregatum impar per 8^{am}, quod numerus graduum precedentium ab est impar; sequitur, quod numerus [ad] per numerum imparem numeratur; sequitur per 4^{am}, quod numerus ad non sit numerus duplationis, quod volub. prob. suppositum, cum ac[25a]) non sit sola vnitas, sicut esset si ab esset secundi gradus triplationis, [casus][26]) qui est exceptus natura; tunc naturaliter ad esset numerus duplationis, quia ac certum non esset numerus sed vnitas, a qua omnis numerus numeratur et duplata est secundus numerus duplationis.

27. Sola vnitate subtracta a quovis numero triplationis existenti in quovis impari gradu[27]) immediate sequente quartum gradum vel numeratur per 4, ut in gradu 5^0, 9^0, 13^0, 17^0 et cet., residuum non est numerus duplicationis.

Sit datus numerus triplationis ab, qui est impar p. 3^{am}, a quo db vnitate subtracta remanet numerus ad par; quo diviso per medium in puncto c, sequitur per 5^{am} quod ac numerus sit equalis aggregato omnium numerorum graduum precedentium ab, cui etiam aggregato equalis est numerus cd. Sequitur p. 10^{am} quod dictum aggregatum numeratur per 5 et similiter, quia dividimus[28]) per medium in puncto c;[29]) sequitur, quod ad numeretur per 5; sequitur per 4^{am} quod ad non est numerus duplicationis.

28. Sola vnitate subtracta a quovis numero triplationis existente in quovis impari gradu non immediate sequenti gradum quartum vel numeratur per 4 ut gradus 7^{us}, 11^{us}, 15^{us}, de quibus solum loqui habemus hoc modo quantum ad gradus triplationis, residuum non est numerus dupli-

cationis. Sit datus numerus triplationis ab, qui est impar per 2^{am}, a quo db vntitate subtracta remanet[30]) ad par, quo diviso per medium in puncto c remanet numerus ac equalis aggregato omnium numerorum omnium graduum precedentium ab per 5^{am}. Et separatur[31]) a numero a c numerus c t, equalis aggregato duorum primorum graduum, quorum aggregatus est 4; remanet at equalis aggregato omnium numerorum omnium aliorum graduum precedentium ab, primo gradu et secundo amotis. Cum alii gradus sunt 4 vel numerantur per 4, sequitur, quod numerus at numeratur per 8 per 10^{am}, [et] dictum aggregatum sibi equale numeratur per 4.[32]) Et pon'tur quod numerus f g sit quarta pars numeri at[33]). Cui fg addatur vnitas gh, quae est quarta numeri ct; sequitur, quod fh numerus sit impar et quod sit quarta pars numeri ac et quarta pars etiam numeri cd. Sequitur, quod ad numerus numeratur per numerum fh, qui est impar, sequitur, quod [non sit] numerus duplicationis. Et sic est demonstrata veritas oppositi juris primi, quod sola vnitate subtracta a quovis numero triplationis, tertio gradu et secundo exceptis, residuus non est numerus duplicationis.

Nunc restat demonstranda veritas oppositi juris secundi, scilicet quod: s o l a v n i t a t e a d d i t a c u i v i s n u m e r o t r i p l a t i o n i s, primo gradu qui est vnitas et secundo exceptis, a g g r e g a t u s n o n e s t n u m e r u s d u p l i c a t i o n i s.

29. Sola vnitate addita cuivis numero triplationis imparis gradus, primo qui est vnitas excepto, aggregatum non est numerus [duplicationis].

Sit ab quivis numerus triplationis imparis gradus cui additur bd vnitas. Et ab a b de numero subtrahatur vnitas cb; remanet ac numerus par, quo diviso in duas partes equales in puncto c remanet numerus ac equalis[34]) aggregat omnium numerorum precedentium ab per 5^{am}, qui aggregatus est par per 4^{am}, quia gradus precedentes sunt pares[35]) partes. Cui numero ac, qui est par, addita vnitate ef, resultas est impar, et est notum, quod resultas est medietas numeri ad. Sequitur, quod numerus ad per imparem numerum numeratur et per consequens per 4^{am} numerus predictus non est numerus duplicationis q. v. p.

30. Sola vnitate addita cuivis numero triplationis paris gradus secundo excepto aggregatum non est numerus duplicationis.

Sit ab ille numerus triplationis paris gradus, qui est impar per 2^{am} cui additur bd vnitas. Et ponitur, quod numerus ce sit numerus precedens ab[36]). Sequitur, quod numerus ab sit ter numerus ce. A quo [numero] subtrahatur fe vnitas; et in numero ab addantur numeri ag, gh, hh', sic ut quilibet eorum sit equalis numero cf. Remanet numerus h'b ter fe, qui est vnitas. Sequitur, quod numerus h'b sit 3, sequitur, quod numerus h'd sit 4. Et dividatur numerus cf, qui est par, in duas partes equales in puncto l. Sequitur per 5^{am}, quod numerus c l sit equalis [aggregato] omnium numerorum [omnium] graduum prececedentium ce numero, et per 7^{am} dictum aggregatum est par. Sequitur per 9^{am}, quod numerus cl numeretur per 4; sequitur, quod cf numeretur per 8; sequitur quod numerus ah' numeretur per 8. Sequitur per 11^{am}, quod quarta pars numeri ah' sit par. Et ponitur, quod ista quarta pars sit mn, qui est par. Cui additur no vnitas, quae est quarta pars numeri h'd. Sequitur, quod numerus mo sit impar, et quod sit quarta pars numeri ad; sequitur quod numerus ad per numerum mo imparem numeretur. Sequitur per 4^{am}, quod numerus ad non sit numerus duplicationis quod volubamus probare.

Patet ergo ex sufficienti divisione numerorum predictorum trium serium et mutua comparatione eorum ad invicem quod:

exceptis superius notatis nec sunt aliqui alii duo numeri in ambicis dictarum specierum contenti equales aut sola vnitate distincti, et per consequens quilibet duo alii a predictis numero distinguntur, quod erat principale probandum.

Explicit in Nomine Christi.

Noten.

Noten

zu

De numeris harmonicis.

---

[1]) Im Text heißt es immer armonicus ohne h, ebenso wie ebreus statt hebreus.

[2]) Es ist, wie schon Steinschneider bemerkt, zweifelhaft, was hier mit nostro opere mathematico gemeint ist. Das liber bellorum deï war schon 14 Jahre früher beendet; daher ist es unwahrscheinlich, daß Leo darauf sich beziehe. Man könnte nun zunächst an seine Euklidkommentare, speziell an „Das Buch der Wissenschaft der Geometrie" denken, deren Abfassungszeit sicher nach 1329 fällt, da in der Einleitung der Ergebnisse des liber bellorum deï Erwähnung geschieht. Ob diese aber auch in christlichen Kreisen bekannt geworden waren? Wir kennen bis jetzt keine lateinische Übersetzung, weder von Leos Algebra, noch von seinen geometrischen Büchern. Vielleicht, daß die Worte allgemeiner zu deuten sind: „als unser mathematisches Schaffen schon beendet war". Denn in der Tat sind die letzten Lebensjahre Leos mit der Beschäftigung mit biblischen und rabbinischen Schriften erfüllt, und erst aus Anlaß des bischöflichen Auftrages wendet er sich von neuem der Mathematik zu.

[3]) Ich vermochte nicht zu ermitteln, welche Bedeutung der folgende Satz für die Theorie der Musik im Mittelalter hatte.

[4]) Der Begriff der harmonischen Zahl ist von dem der harmonischen Proportion — (bei Ibn Esra ערך הנגינות) abgeleitet, die, zur Teilung der Monochordsaite benutzt, harmonischen Zusammenklang mehrerer Töne ergibt. Vgl. Diterici Propädeutik S. 74 ff; ferner Ibn Esra ed. Silberberg, S. 47 ff. und die Anm. 109 auf S. 108.

[5]) Dieser Ausdruck continui entspricht dem der מספרים נמשכים, der aufeinanderfolgenden Zahlen der Maasse Choscheb.

[6]) Hier steht offenbar vor 2 das Wort proportione.

[7]) Im Text finden sich die Abbreviaturen: ans connia pr., die sich nur schwer deuten lassen.

[8]) Die Paragraphenzahlen sind im Mskr. nicht angegeben, sondern von mir nach den Angaben des Textes rekonstruiert.

[9]) Die natürlich keine ungrade, weil überhaupt keine Zahl ist. Vergl. Biographie Kap. VIa.

[10]) Die eingeklammerten Worte ergeben keinen Sinn, sind offenbar durch ein Versehen des Abschreibers in eine falsche Reihe gekommen.

[11]) Die elementare, von Leo selbst aufgestellte Formel für die Summe der geometrischen Reihe:

$$\begin{aligned} s &= 1 + 3 + 3^2 + \ldots + 3^{n-1} \\ 3s &= \phantom{1 +{}} 3 + 3^2 + 3^3 + \ldots + 3^n \\ 3s - s = 2s &= 3^n - 1 \\ s &= \frac{3^n - 1}{2} \end{aligned}$$

[12]) In der Handschrift steht Qrus = Quorumvis; ich vermute, daß es trium heißen sollte.

[13]) Hier im Sinne von paarweise.

[14]) In der Handschrift steht quadratus a.

[15]) $\frac{a}{ab} = \frac{1}{4}$, also $ab = 4a$.

[16]) In der Handschrift folgen die Worte: *quato nuori.* Dis Lesart quater numero ist schwerlich rtchtig.

[17]) Paarweise wie Note 13.

[18]) Denn: $3^n + 3^{n+1} + 3^{n+2} + 3^{n+3}$
$= 3^n (1 + 3 + 9 + 27) = 3^n . 40$
$= 3^n . 5 . 8$

[19] Zu ergänzen duorum.

[20] Die Zahl ist im Mskr. unleserlich.

[21] In der Handschr. *Hns.*

[22] duplationis ist zu streichen.

[23] In der Handschrift *contiu.*

[24] inter ist zu ergänzen, wie im folgenden alles in eckigen Klammern Stehende, während die in runde Klammern gesetzten Worte m. E. zu streichen sind.

[25]) Im Mskr. sena^o.

[26]) Im Mskr. steht hier *mt*, was ich nicht zu deuten imstande bin.

[27]) In der Handschrift folgen die Worte: exceptis secundo gradu duplationis et secundo triplationis.

[28]) In der Handschrift steht duplationis.

[29]) Im Mskr. ad.

[30]) Hier ist in der Handschrift radiert worden, die Stelle daher unleserlich. Ich glaube aber die Buchstaben c. 5 noch erkannt zu haben.

[31]) Alle ungraden Zahlen sind entweder in der Form

$4n + 1$
oder $4n + 3$ $\quad n = 0, 1, 2 \ldots \infty$

darstellbar. Auf diesem Gedanken baut Leo seine Einleitung derselben auf.

[32]) Im Mskr. quo diviso.

[33]) Im Mskr. folgen die Worte: sequitur per 5^{am}, quod numerus ac sit equalis aggregato omnium numerorum graduum precedentium ab, cui et equalis numerus

c d; sequitur per 5^{am}, quod dictum aggregatum numeratur per 5 et similiter c d.

[34]) remanet steht im Mskr. doppelt.

[35]) Im Mskr. sepet^r.

[36]) M. E. muß es statt der Worte dictum — per 4 heißen:

seq., quod. ac numerus numeratur per 4.

[37]) Im Mskr. a c.

[38]) equalis steht im Mskr. doppelt.

[39]) Im Sinne von paarig.

[40]) Im Mskr. heißt es: quod. numerus ce sit aggregatum omnium numerorum graduum precedentium ab, was ich in numerus precedens ab emendiert habe.

[41]) Der Sinn dieser Worte ist: auf der a b repräsentierenden Strecke wurde abgetragen etc.

Zum Schlusse bemerken wir: Zur Datierung in Christi incarnationis anno 1343 vergl. Note 47 zu Kap. V der Biographie. Die Benediktion am Ende des Ganzen ist u. E. vom Übersetzer etwa für תהלה לאל gesetzt worden.

B. II.

Proben aus

Maasse-Choscheb

(Werk des Rechners.)

Vorwort.

Unter Zugrundelegung von 2 Handschriften, der Cod. hebr. 36 u. 68 des Steinschneiderschen Katalogs der Münchener Königl. Bibliothek, habe ich im Jahre 1908 die Algebra Leos ins Deutsche übertragen und vollständig der mathematisch — naturwissenschaftlichen Fakultät der Universität Heidelberg als Teil einer Dissertationsschrift vorgelegt. Hier muß ich mich mit wenigen Proben des Werkes begnügen, die Charakter und Anlage des Ganzen anschaulich machen sollen; dabei habe ich der Kürze wegen zuweilen Formeln und Symbole gebraucht, die dem Verfasser des Maasse-Choscheb fremd sind, die man also in Worte sich zurückübersetzt zu denken hat.

Also sprach Lewi ben Gerson: Da die höchste Stufe in der Ausübung unserer Tätigkeit diejenige ist, daß wir bei jeglicher Arbeit neben der Kenntnis der Art und Weise ihrer Ausführung auch wissen, warum wir sie in dieser Weise ausführen; und da die angewandte Rechenkunst eine von diesen unseren praktischen Tätigkeiten[1]) ist, so ist es füglich angebracht, in ihr nach ihren Gründen[2]) zu fragen[3]). Und noch ein Umstand[4]) läßt es uns notwendig erscheinen, in dieser Kunst nach den Gründen zu forschen. Denn offenbar umfaßt die Rechenkunst sehr vielerlei Arten, und jede Art umfaßt sehr viele, so durchaus verschiedenartige Stoffe, daß es zu glauben Anlaß geben könnte, sie gehörten nicht unter eine Rechnungsart. Daher ist das vollkommene Verständnis dieser Kunst ohne die Kenntnis der Gründe nur sehr schwer möglich. Dagegen bei Bekanntschaft mit den Gründen ist ihre völlige Beherrschung leicht; denn wer die Gründe kennt, weiß mit dieser einen Kenntnis auch, wie sich die Arbeit in den verschiedenen Fällen gestaltet, bei denen für die praktische Ausrechnung eine und dieselbe Begründung gilt. Unbekannt mit den Gründen, braucht man aber je nach der Verschiedenheit der Stoffe vielerlei Kenntnisse, die eigentlich nur eines und dasselbe sind.[5]) Daher beabsichtigen wir in diesem Werke[6]) die Gesetze der Zahlen und ihre Gründe nach unserem geringen Können[7]) darzulegen und haben dem Ziele dieser Untersuchung gemäß das Werk in zwei Bücher zerlegt.

Das erste Buch umfaßt die Grundlagen für das, was wir von der Rechenkunst auseinandersetzen wollen.

Das zweite Buch enthält die Methoden der Ausrechnung für jede Art der Zahlenverknüpfung[8]) und deren Begründung.

Weil nun dieses Buch Theorie und Praxis zugleich enthält, haben wir es Werk des denkenden Rechners[9]) genannt. Die Lehrstufe aber, die in diesem Buche eingehalten ist, läßt es angebracht erscheinen, vor der Beschäftigung mit ihm Einsicht in das siebente, achte und neunte Buch des Euklid zu nehmen; denn es ist nicht unsere Absicht, hier dessen Worte zu wiederholen, sondern wir setzen sie als Elemente voraus, nachdem sie dort mit Beweisen dargelegt sind.

(Leo erläutert zunächst einige Vorbegriffe[10]) und im Texte benutzte technische Bezeichnungen; so die Begriffe der „zusammengesetzten Zahl“,[11]) und der „zusammengesetzten Verhältnisse“,[12]) worunter ein Produkt aus beliebig vielen Zahlfaktoren resp. Brüchen verstanden werden soll, ferner den Begriff der in arithmetischer Reihe „aufeinanderfolgenden“ Zahlen, den des arithmetischen Mittels u. a. m. Er schließt mit der Bemerkung: „Es kann vorkommen, daß die Eins geteilt wird, insofern sie eine benannte Zahl[13]) ist. Das ist ein anderer Gesichtspunkt, als wenn man die Eins als bloße Zahl, abstrahiert von ihrer Dimension betrachtet; aber unser Buch umfaßt beide Gesichtspunkte, daher tragen wir kein Bedenken, wenn in einigen „Figuren“ dieses Buches die Eins geteilt wird.)

Das erste Buch.

(§§ 1—14 behandeln die elementaren Gesetze der Multiplikation von Summen mit einer Zahl oder einer Summe, das Quadrat eines Binoms und ähnliches mehr; nach diesen distributiven Beziehungen, das kommutative und assoziative Gesetz der Multiplikation, endlich die Multiplikation gebrochener Zahlen. Es folgen alsdann

zwei zahlentheoretische Sätze:

§ 15.

Ist eine Zahl relativ prim[15]) zu einem Produkt irgend welcher gegebener Zahlen, so ist sie zu jedem einzelnen Faktor derselben rel. prim[16]).

Es sei die Zahl a relativ prim zu e = b . c . d, so behaupte ich, daß a zu jeder der Zahlen b, c, d, prim ist.

B e w e i s. Denn anders ist es nicht möglich. Hätten nämlich [etwa] a und c einen gemeinsamen Teiler, so muß sie notwendig irgend eine Zahl, sagen wir f, zählen[17]). Aber c zählt e, (also zählt auch f die Zahl e) aber f zählt auch a, also hätten a und e einen gemeinsamen Teiler, sollen aber nach Voraussetzung teilerfremd sein. Das ist ein Widerspruch. Also muß a rel. prim sein zu jeder der Zahlen b, c, d.

§ 16.

Ist eine Zahl teilerfremd zu allen denjenigen Zahlen, die kleiner sind als die Wurzel aus dem der gegebenen Zahl zunächstliegenden größeren Quadrat, so ist sie eine Primzahl [15]).

Sei a teilerfremd zu den Zahlen, die kleiner sind als $\sqrt{b}$, wo b die a benachbarte größere Quadratzahl ist; es sei $\sqrt{b} = c$, und die Primzahlen, die kleiner als c sind, seien d, e, f. Ist nun a teilerfremd zu d, e, und f, so sage ich, a ist Primzahl.

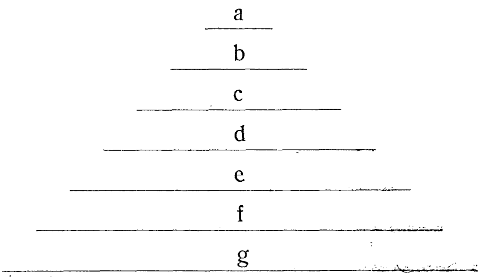
Beweis. Denn wäre a nicht prim, so ergäbe sich eine Unmöglichkeit. Irgend eine Zahl etwa h, müßte a zählen nach einer Zahl i [d. h. $a = h \,.\, i$]. Offenbar können nicht beide Zahlen h und i kleiner als c sein, denn wäre das möglich, so könnte $h \,.\, i = a$ nicht kleiner sein $c \,.\, c = b$; aber nach Voraussetzung ist $a < b$, also ist das ein Widerspruch. Vielmehr muß eine der Zahlen h und i kleiner als c sein. Es sei h die kleinere. h ist nun entweder prim oder zusammengesetzt. Ist sie prim und kleiner als c, so könnte a nicht teilerfremd sein zu allen Primzahlen, die kleiner als c sind, was aber durch die Voraussetzung verlangt wird; ist aber h zusammengesetzt, so muß h notwendig einen Primfaktor kleiner als h haben, der zugleich kleiner als c ist. Dann aber ergibt sich derselbe Widerspruch wie früher. Also kann keine Zahl die Zahl a zählen.

(Die §§ 17 und 18 sprechen über die Vertauschbarkeit der Reihenfolge mehrerer Divisionen. §§ 19—25 leiten den Abschnitt über die Summen arithmetischer Reihen durch einige einfache Zahlbetrachtungen[18]) ein.)

Arithmetische Reihen.

§ 26.

Werden die aufeinanderfolgenden natürlichen[19] Zahlen von 1 an addiert, und ihre Anzahl ist gerade, so ist die Summe gleich dem Produkt ihrer halben Anzahl in die der letzten von ihnen nachfolgende Zahl.



Seien die aufeinanderfolgenden Zahlen

a, b, c, d, e, f, [20]

die auf f folgende Zahl heiße g und a sei gleich 1 und werde in dieser ganzen Untersuchung 1 genannt, so behaupte ich, daß $a+b+c+d+e+f$ gleich ist ihrer halben Anzahl multipliziert mit g.

B e w e i s. a ist 1, also $a+f=g$; aber b ist um soviel größer als a wie e, kleiner als f, weil beidemal die Differenz 1 ist, also auch $b+e=g$; so ist offenbar auch der Ueberschuß von c über 1 gleich der Differenz von f und d, weil beidemal die eine Zahl um 2 größer ist als die andere, also auch $c+d=g$, also zählt die Summe $a+b+c+d+e+f$ die Zahl g nach Maßgabe[17] ihrer halben Anzahl, weil je 2 [Summanden] zusammen g einmal zählen, und das ist das, was wir beweisen wollten.

Es ist klar, daß diese Betrachtungsweise ohne Grenzen anwendbar ist. Und ohne Zweifel muß man bei solchem Verfahren zuletzt zu 2 aufeinanderfolgenden Zahlen, wie c und d in unserem Beispiele, gelangen. Denn sonst läge zwischen ihnen noch eine Zahl und die eine von ihnen ist um 2 größer als die andere. Setzen wir dann die Differenz zwischen der größeren von beiden und der letzten [der betrachteten Zahlenreihe] gleich h; da nun die beiden sich um 2 unterscheiden, so wäre der Ueberschuß der größeren von beiden über 1 gleich $h + 2$, also da die letzte (der Reihe) um h größer als diese ist, deren Ueberschuß über 1 gleich $2h + 2$; das ist aber eine gerade Zahl, ist nun der Ueberschuß der letzten über 1 eine gerade Zahl, so muß die letzte selbst ungerade sein, ist aber nach Voraussetzung gerade; das ist also ein Widerspruch. Vielmehr müssen wir zuletzt auf zwei aufeinanderfolgende Zahlen stoßen, und damit bestätigt sich unser Satz.

§ 27.

Werden die aufeinanderfolgenden natürlichen Zahlen von 1 an summiert, und ist die Anzahl der Summanden ungerade, so ist das Resultat gleich dem Produkt der in der Mitte stehenden Zahl in die letzte.

(Der Beweis ist so geführt. Sind a, b, c, d, e, die aufeinanderfolgenden Zahlen, so ist
$$a + e = 2c$$
$$b + d = 2c$$
$$c = c,$$
also das Mittel c so oft in der Reihensumme enthalten, als die Endzahl e Einheiten hat.)

§ 28.

Hat man eine ungerade Anzahl von Folgezahlen, die von 1 an aufeinanderfolgen, und wird die Hälfte der letzten Zahl mit der auf sie folgenden multipliziert, so ist das Produkt gleich der Summe der gegebenen Zahlen.

Beweis. Denn das Mittel ist eben gleich der Hälfte der auf die letzte folgenden Zahl.

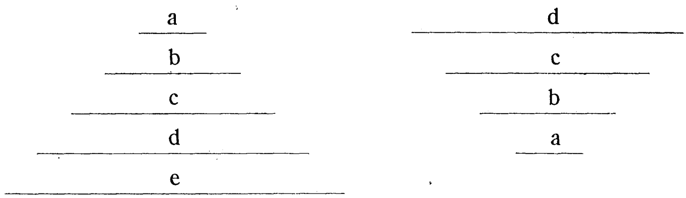
§ 29.

Die Summe der in der Reihe der natürlichen Zahlen aufeinanderfolgenden ungeraden Zahlen ist gleich dem Quadrat des Mittels zwischen der letzten ungeraden und 1.

Beweis. Die betrachteten Zahlen seien 1, 3, 5, 7, 9. Das Mittel ist entweder gerade oder ungerade. Sei es zunächst ungerade, wie in diesem unserem Beispiele. $1+9=2.5$; $3+7=2.5$. Also zählt die Summe der Zahlen 1, 3, 7, 9 die Zahl 5 nach Maßgabe der Anzahl dieser Zahlen, denn offenbar gibt es keine ungerade auf einer Seite [des Mittels], die sich nicht zu einer korrespondierenden auf der anderen Seite addiert würde. Die Anzahl von ungeraden aber, die 5 voraufgehen, ist gleich $^1/_2$ (5—1); also zählt die Summe $1+3+7+9$ die Zahl 5 (5—1) Mal; 5 zählt sich selbst einmal, also ist die Summe $1+3+5+7+9=5^2$. Sei ferner das Mittel eine gerade Zahl, dann ist die Zahl der im vorangehenden ungeraden gleich der Hälfte des Mittels, es ist aber bereits gezeigt, daß ebensoviele ungerade auf das Mittel folgen, als ihm vorangehen, also ist wiederum die Summe gleich dem Quadrat des Mittels.

§ 30.

Wird die Summe der Folgezahlen[21]) von 1 an bis zu einer gegebenen zu der Summe der Folgezahlen von 1 bis zu der auf die gegebene folgenden Zahl addiert, so ist das Resultat gleich dem Quadrat der auf die gegebene folgenden Zahl.



Beweis. Es werde also die Summe der Folgezahlen e, b, c, d, e[20]) zu der Summe $a+b+c+d+e+f$ addiert; und es sei g die auf f folgende Zahl, dann ist die erste Summe gleich $\frac{e}{2} \cdot f$, die zweite gleich $\frac{f}{2} \cdot g$; aber $\frac{f}{2}\, g = \frac{g}{2} \cdot f$, weil die Faktoren gleich sind[2]), also beide Summen vereinigt gleich $\frac{e}{2}\, f + \frac{g}{2} \cdot f$; aber $e+f=2g$ also sind die Summen vereinigt gleich $g \cdot g$,; d. h. g^2.

§ 31.

Die doppelte Summe der Folgezahlen von 1 bis zu einer gegebenen ist gleich der gegebenen Zahl vermehrt um ihr Quadrat.

Beweis. Denn wenn die Summe $a+b+c+d+e$ zu der Summe $a+b+c+d$ addiert wird, ist das Resultat nach dem vorigen Satz gleich e^2, also ist $2\,(a+b+c+d+e)$ um die hinzugefügte Zahl e größer als e^2.

Aus dieser Figur folgt, daß die Summe der Folgezahlen von 1 bis zu einer gegebenen gleich ist der Hälfte des Quadrats der gegebenen plus der Hälfte der gegebenen.

§ 32.

Werden die Summen der Folgezahlen, die 1 zur gemeinsamen Anfangszahl haben (von 1 an), bis zu einer gegebenen Zahl addiert, so ist das Resultat gleich der Summe der Quadrate der mit der gegebenen Zahl gleichartigen Folgezahlen von 1 bis zu der gegebenen Zahl, d. h. ist die gegebene Zahl gerade — ungerade —, so ist das Resultat gleich den Quadraten der geraden — ungeraden — Folgezahlen, die bis zur gegebenen Zahl einander folgen.

1	1	1	1	1
	2	2	2	2
		3	3	3
			4	4
				5

Werde 1 zu $1+2$, zu $1+2+3$, zu $1+2+3+4$, zu $1+2+3+3+5$ und zu $1+2+3+4+5+6$ addiert, wo 6 gerade ist: so behaupte ich, daß die Summe gleich $2^2+4^2+6^2$, den Quadraten der geraden Zahlen, ist.

Beweis.

$$
\begin{array}{lll}
(1+2+3+4+5+6) & +\ (1+2+3+4+5) & = 6^2 \\
(1+2+3+4) & +\ (1+2+3) & = 4^2 \\
(1+2) & +\ (1) & = 2^2
\end{array}
$$

w. z. b. w.

(Genau analog ist der Beweis für eine ungerade Endzahl.)

§ 33.

Werden die Summen der Folgezahlen mit gemeinsamer E n d z a h l zu einander addiert, bis man in der Reihenfolge [der Summen] bis zu der letzten von ihnen kommt, so ist das Resultat gleich [der Summe] der Quadrate aller dieser Zahlen.

1	2	3	4	5
	2	3	4	5
		3	4	5
			4	5
				5

B e w e i s. Denn jede von den Zahlen 1, 2 3, 4, 5 kommt in den Summen

$$
\begin{array}{l}
5+4+3+2+1 \\
5+4+3+2 \\
5+4+3 \\
5+4 \\
5
\end{array}
$$

so oft vor, als sie Einheiten enthält, weil ja für jede Zahl die Anzahl der bis zu ihr sich erstreckenden Folgezahlen ihr gleich ist; aber jede Zahl kommt in jeder von den Summen vor, die mit bis zu ihr reichenden Folgezahlen beginnen, findet sich aber in den Summen nicht, die [anfangen] mit auf sie folgenden Zahlen, denn unmöglich kann die kleinere Zahl auf die größere folgen; demnach kommt jede der Zahlen 1, 2, 3, 4, 5 in diesen Summen so oft vor, als sie Einheiten zählt; d. h. aber [in der Gesamtsumme] ist ihr Quadrat enthalten.

§ 34.

Wird die Summe der Summen von Folgezahlen mit gemeinsamer Endzahl – bis man zu der Endzahl selbst kommt — zu der Summe der Summen von Folgezahlen mit 1 als gemeinsamer Anfangszahl, von 1 an bis zu der vor der genannten Endzahl vorangehenden Zahl addiert; so ist das Resultat gleich dem Produkt der Endzahl in die Summe der bis zu ihr reichenden Folgezahlen.

Beweis.

1	2	3	4	5
1	2	3	4	5
1	2	3	4	5
1	2	3	4	5
1	2	3	4	5

Werde $(1+2+3+4+5)+(2+3+4+5)+(3+4+5)+(4+5)+5$ zu $(1)+(1+2)+(1+2+3)+(1+2+3+4)$ addiert; wird dabei jede der Summen mit gemeinsamer Endzahl mit der entsprechenden aus den Summen mit gemeinsamer Anfangszahl zusammengefaßt, so ergibt sich jedesmal die Summe $(1+2+3+4+5)$. Die Anzahl der Summen mit gemeinsamer Endzahl ist aber gleich der in 5 enthaltenen Zahl von Einheiten, also zählt die Gesamtsumme die Summe $(1+2+3+4+5)$ fünfmal.

§ 35.

Hilfssatz.

Werden zwei Folgezahlen von ihren Quadraten subtrahiert, so ist der Rest gleich dem doppelten Quadrat der kleineren Zahl.

(Beweis.)

Denn da $(n+1)^2 = n^2 + n + (n+1)$ ist,
so wird $(n+1)^2 + n^2 = 2n^2 + n + (n+1)$,
daher $(n+1)^2 - (n+1) + n^2 - n = 2n^2$ sein.)

11

§ 36.

Vereinigt man die Summen der Folgezahlen mit gemeinsamer Endzahl, von 1 an bis zur Endzahl [als letzter Summe] und subtrahiert von dem Resultat eben diese Folgezahlen, so ist der Rest gleich dem Doppelten aller Quadrate derjenigen Folgezahlen, die mit der vor der Endzahl stehenden gleichartig sind und bis zur Endzahl sich aneinander reihen; ist erstere gerade, [gleich dem doppelten der Quadrate] der geraden Zahlen, ist sie ungerade, gleich dem der ungeraden, die 1 mitgezählt.

Werden die Summen

$$\begin{array}{ccccc} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ & 2 & 3 & 4 & 5 \\ & & 3 & 4 & 5 \\ & & & 4 & 5 \\ & & & & 5 \end{array}$$

addiert, von dem Resultat $(1+2+3+4+5)$ subtrahiert, so sage ich, daß wenn [wie hier] die vorletzte Zahl gerade ist, der Rest gleich dem doppelten der Quadrate der bis 5 gezählten geraden Folgezahlen ist.

Beweis. Denn der Rest ist gleich den Quadraten $(1^2 + 2^2 + 3^2 + 4^2 + 5^2)$ vermindert um $(1+2+3+4+5)$

aber $(4^2 + 5^2) - (4 + 5) = 2 \,.\, 4^2$

$(3^2 + 2^2) - (3 + 2) = 2 \,.\, 2^2$,

das noch übrige 1^2 verschwindet, wenn 1 von ihm subtrahiert wird, also ist der Rest gleich dem doppelten der Quadrate von 2 und 4.

(Genau entsprechend ist der Beweis für eine ungerade Zahl an vorletzter Stelle geführt.)

§ 37.

Wird eine gegebene Zahl mit der Summe der Folgezahlen multipliziert, die von 1 bis zu der auf die gegebene folgenden Zahl reichen, so ist das Resultat gleich dem Dreifachen der Quadrate der mitder gegebenen gleichartigen Folgezahlen, die bis zu ihr hin aufeinander folgen.

Beweis. Werde 5 mit der Summe $(1+2+3+4+5+6)$ multipliziert. Nun ist $6 \times (1+2+3+4+5+6)$ gleich den Summen

$$\left.\begin{array}{l} \\ 1 \\ 1+2 \\ 1+2+3 \\ 1+2+3+4 \\ 1+2+3+4+5 \end{array}\right\} + \left\{\begin{array}{r} 1+2+3+4+5+6 \\ 2+3+4+5+6 \\ 3+4+5+6 \\ 4+5+6 \\ 5+6 \\ 6 \end{array}\right.$$

die ersten Summen aber sind gleich $1^2+3^2+5^2$, die zweiten Summen aber vermindert um $(1+2+3+4+5+6)$ gleich $2\,(1^2+3^2+5^2)$; also $6 \times (1+2+3+4+5+6)$ ist gleich $3\,(1^2+3^2+5^2) + (1+2+3+4+5+6)$; 6 aber ist $5+1$; also $6\,(1+2+3+4+5+6)$ ist eben um die Summe $(1+2+4+4+5+6)$ größer als $5\,(1+2+3+4+5+6)$ oder als $3\,(1^2+3^2+5^2)$ mithin ist
$5\,.\,(1+2+3+4+5+6) = 3\,(1^2+3^2+5^2)$.

Aus dieser Figur geht hervor: wird ein drittel der gegebenen Zahl mit der Summe der Folgezahlen von 1 bis zu der auf die gegebene nachfolgenden Zahl multipliziert, so ist das Resultat gleich den Quadraten der mit der gegebenen gleichartigen Zahlen, die bis zu ihr hin aufeinanderfolgen.

§ 38.

Wird eine gegebene Zahl, vermindert um ein drittel der ihr voraufgehenden, mit der Summe der

Folgezahlen von 1 bis zu ihr multipliziert, so ist das Resultat gleich den Quadraten aller Folgezahlen von 1 bis zur gegebenen Zahl.

(Beweis. Durch Kombination von Satz 34 mit dem Zusatz des letzten Paragraphen geführt.)

§ 39.

Subtrahiert man eine gegebene Zahl von ihrem Quadrate, so ist die Hälfte des Restes gleich der Summe der Folgezahlen, von 1 an bis zu der vor der gegebenen vorausgehenden Zahl.

(Beweis. Unter s_n die Summe der n Folgezahlen verstanden, ist

$$s_n = \frac{n\,(n+1)}{2}, \quad s_{n-1} = \frac{n\,(n-1)}{2}$$

$$s_n + s_{n-1} = n^2 = 2\,s_{n-1} + n$$

oder $\dfrac{n^2 - n}{2} = s_{n-1}$)

§ 40.

Wird irgend eine gegebene Zahl zu der halben Differenz ihres Quadrats und der gegebenen Zahl selbst addiert, so ist das Resultat gleich der Summe der Folgezahlen von 1 bis zur gegebenen Zahl.

§ 41.

Das Quadrat, das aus der Summe der Folgezahlen von 1 bis zu einer gegebenen Zahl gebildet wird, ist gleich dem Kubus der gegebenen Zahl und dem Quadrat der Summe der Folgezahlen von 1 bis zu der vor der gegebenen vorausgehenden Zahl.

Beweis. Es sei die Summe der Folgezahlen

$$1+2+3+4+5$$

betrachtet. Nun zählt 5^3 die Zahl 5 so oft, als in 5^2 Einheiten stecken, 5^2 aber ist gleich

$(1+2+3+4)+(1+2+3+4+5)$, also ist
$5^3 = 5 \,.\, 5 + 2\;(1+2+3+4)+5$. Aber
$$(1+2+3+4+5)^2 = 5 \,.\, 5 + 2 \,.\, 5 \,.\, (1+2+3+4) + (1+2+3+4)^2$$
also $(1+2+3+4+5)^2 = 5^3 + (1+2+3+4)^2$.

Der 1 zwar geht keine Zahl voran, aber sein Kubus ist gleich dem Quadrat der bis zu 1 erstreckten Summe; denn 1 selbst ist die bis 1 erstreckte Summe und ihr Quadrat.

§ 42.

Das Quadrat aus der Summe der Folgezahlen von 1 bis zu einer gegebenen Zahl ist gleieh den Kuben der Folgezahlen von 1 bis zu der gegebenen Zahl.

(Beweis. Gemäß § 41 ist:

$$s_n{}^2 = n^3 + s_{n-1}^{\,2}, \text{ aber } s_{n-1}^{\,2} = (n-1)^3 + s_{n-2}^{\,2},$$
also
$$= n^3 + (n-1)^3 + s_{n-2}^{\,2},$$
entsprechend
$$= n^3 + (n-1)^3 + (n-2)^3 + s_{n-3}^{\,2}$$
— — — u. s. f.)

§ 43.

Ist eine Zahl gegeben gleich einer gegebenen Summe von Folgezahlen, die von 1 anfangen, und diese gegebene Zahl ist das Mittel von Folgezahlen, d. h. das Mittel zwischen der letzten von ihnen und 1; so sind die Kuben der gegebenen Folgezahlen gleich der Summe der ungeraden unter den anderen Folgezahlen, einschließlich der 1.

(B e w e i s. Ist $6 = 1+2+3$ die gegebene und 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11, 12 die Reihe, deren Mittel 6 ist, so ist $6^2 = 1^3 + 2^3 + 3^3$,
aber auch $6^2 = 1+3+5+7+9+11$
also $1^3+2^3+3^3 = 1+3+5+7+9+11$ w. z. b. w.)

§ 44.

Algebraische Identitäten.

Sind 3 verschiedene Zahlen gegeben, und wird das Produkt der größten in den Überschuß der mittleren über die kleinste zu dem Produkt der kleinsten in den Überschuß der größten über die mittlere addiert, so zählt das Resultat die mittlere so oft, als die Differenz der größten und kleinsten Einheiten enthält. [21])

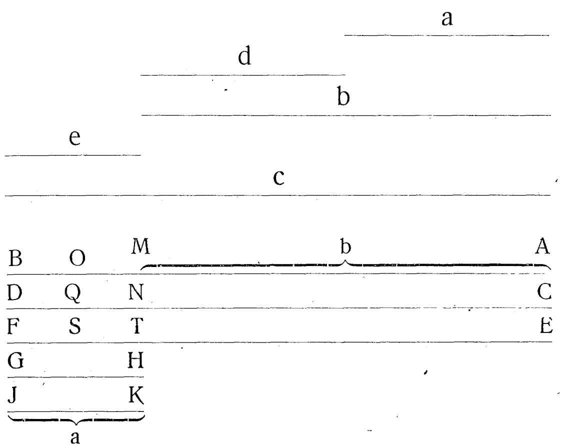
§ 45.

Wird zu dem Produkt zweier (gegebener) Zahlen eine derselben hinzugefügt, so zählt das Resultat die auf die andere folgende Zahl so oft, als die erste gegebene angibt. [22])

Seien die 3 verschiedenen Zahlen

$a < b < c$, $b - a = d$, $c - b = e$, so behaupte ich, daß

$$c \,.\, d + a \,.\, e = b\,(d + e) = b\,(c - a).$$



B e w e i s.

Produkt $c \,.\, d$ zerfällt in d Teile gleich c; sie mögen heißen AB, CD, EF . . .

$c \,.\, e$ zerfällt in e Teile gleich a: sie mögen heißen GH, JK, LM . . .

Die Anzahl dieser Teile ist also $d + e$.

Sondern wir von
AB einen Teil AM = b ab, daß MB = c—b,
CD einen Teil CN = b ab, daß ND = c—b,
— — — — — — — — — —

ist, so ist die Anzahl der Teile MB = ND ··· = c—b = e gleich der in d enthaltenen Zahl von Einheiten. Teilen wir

jetzt MB in Einheiten ein, etwa: MO, OP, PK
analog ND in Einheiten ein, etwa: NO, OR, RD
— — — —

u. s. f. für alle entsprechenden Größen, so ist die Zahl der (ersten dieser Einheiten) MO + NO + . . = d ebenso die

der (zweiten dieser Einheiten) OP + OR + · · = d
und der (dritten dieser Einheiten) PB + RD + · · = d,

addiere ich zu den ersten GH = a, so ist die Summe = b, ebenso ergeben die zweiten um JK vermehrt b, und die dritten um LM vermehrt b; es gibt aber ebensoviel Größen GH, JK, LM . . . als Reihen von Einheiten, MO + SO + ···, OP + OR . . ., DB + RD . . . weil es von jeder Art e gibt; wenn also die Zahlen GH . . . zu Ende sind, so sind auch MO + NO . . . erschöpft. (Also erhalte ich e Mal die Summe b; aus dem ersten Produkt aber hatten wir bereits d . b erhalten), daher ist: c . d + a . e = b (d + h) w. z. b. w.

§ 46.

Sind 3 verschiedene Zahlen gegeben und die kleinste von ihnen ist 2, so gilt: wird zu dem doppelten Produkt aus der größten weniger eins in den Überschuß der mittleren in die kleinste die größte und der Überschuß der mittleren über die kleinste und der Überschuß der größten über die mittlere addiert, so ist das ganze gleich dem doppelten Produkt aus der mittleren weniger eins in die größere weniger eins.

§§ 47—52.

Diese Abschnitte beweisen folgende Relationen: [23])

§ 47.

$b>a$

$$ab+(b-a)=(a-1)(b-1)+b+(b-1)$$

§ 48.

$c>b$

$$2(c-1)(b-2)+c+(b-2)+(c-b)$$
$$=(b-1)c+(c-1)(b-2)+(c-b)$$

§ 49.

$c>b>a$

$$2(c-1)(b-a)+c(a-2)+(c-1)(a-2)+c+(b-a)$$
$$+(c-b)=2(b-1)(c-1)$$

§ 50.

$c<b>a$

$$2(c-1)(b-a)+(a-2)b.c+(c-b)(a-1)+c+(b-a)$$
$$=(b-1)(c-1).\ a.$$

§ 51.

$$(c-1)(b-a)+c+(b-a)=c(b-a+1)$$

§ 52.

$$(c-1)(b-a)+(a-1)(c-b)+c+(b-a)=b(c-a+1)$$

§ 53.

Zwei Aufgaben.

Wir wollen drei Zahlen finden (von folgenden Eigenschaften): die erste mitsamt einem gegebenen Bruchteile der übrigen Zahlen sei gleich der zweiten mitsamt einem zweiten gegebenen Bruchteil der übrigen, der aber kleiner ist als der gegebene erste Bruchteil, und sei ebenfalls gleich der dritten mitsamt einem gegebenen dritten Bruchteile der übrigen, der kleiner ist als der zweite gegebene Bruchteil. [24])

Es seien die Zahlen, durch welche die Bruchteile benannt sind, die Zahlen a, b, c; und es sei der größte Bruchteil der durch a benannte, und der durch c benannte der kleinste; dann ist a die kleinste und c die größte von den Zahlen; sei der Überschuß von b über a gleich d, $c-b=e$, die c vorangehende Zahl sei f, die b vorangehende h.

Nun ist a notwendig entweder gleich 2 oder größer als 2. Es sei zunächst $a=2$.

Addieren wir die letzte Zahl c zu $d=b-a$, so erhalten wir $c+d$, wir bezeichnen die Summen mit i, dann ist i die erste [der gesuchten] Zahlen.

Ferner addieren wir zu i das zweifache Produkt der größten Zahl weniger 1 in den Überschuß der mittleren über die kleinste, d. h. $2 . f . d$, das Resultat, gleich k gesetzt, ist die zweite (gesuchte) Zahl.

Endlich addieren wir zu k das doppelte des Produktes der kleineren weniger 1 in den Überschuß der größten über die mittlere, d. h. $2 . e\,(a-1)$; das Resultat, das wir gleich l setzen, ist die dritte Zahl. Jetzt also behaupte ich, daß i, k, l die gesuchten Zahlen sind.

(Der Beweis wird durch Ausrechnung geführt, [25]) die $1^1/_2$ fol. in Anspruch nimmt [26]) und durch eine in Strecken beigegebene Figur erläutert wird.

Es ist:

$$k+l=2\,(b-1)\,(c-1);\ i+l=2b.\,(c-1);\ e+d=2c\,(b-1)$$

also $$i+\frac{k+l}{2}=k+\frac{i+l}{b}=l+\frac{i+k}{c}$$ w. z. b. w.)

Es sei ferner $d>2$, $a-2=d$ . . . und belassen wir alles Erforderliche bei der alten Bezeichnung.

Dann nehmen wir das Produkt der mitteren in die größte nach Maßgabe des Überschusses der kleinsten über 2, addieren zum Resultat die größte Zahl samt dem Überschuß der mittleren über die kleinste, setzen das Resultat gleich m, so ist dies die erste Zahl.

m samt dem doppelten Produkt der größten Zahl weniger 1 in den Überschuß der mittleren über die kleinste, das Resultat gleich n gesetzt, ist die zweite Zahl.

n samt dem doppelten Produkt der kleinsten weniger 1 in den Überschuß der größten über die mittlere gleich c gesetzt, ist die dritte Zahl. m, n, o sind dann die gesuchten Zahlen. [27])

(B e w e i s.)

Da $m = c \,.\, b \,.\, (a-2) + c + (b-a)$,
$n = m + 2\,(c-1)\,(b-a)$,
$o = n + 2\,(a-1)\,(c-b)$ ist,

so erhält man

$$m+n = 2\,c\,(b-a);\quad m+o = 2\,b\,(a-1)\,(c-1)$$
$$n+o = 2\,a\,(a-1)\,(c-b),$$

und hieraus die verlangte Relation:

$$m + \frac{n+o}{a} = n + \frac{m+o}{a} = o + \frac{m+n}{c}$$

§ 54.

Aufgabe.

Wir suchen eine Zahl derart, das ein bestimmter Bruchteil oder die Summe von bestimmten Bruchteilen derselben um eine gegebene Zahl größer ist als ein anderer Bruchteil oder eine [andere] Summe von Bruchteilen derselben, die aber kleiner sind als der erstgenannte Bruchteil oder die erstgenannte Summe von Bruchteilen.

Seien die Bruchteile, deren Summe die größere ist, b Teile von a in der gesuchten Zahl, ferner c Teile von d, und 1 Teil von e in ihr; und die Bruchteile, deren Summe kleiner ist, f Teile von h in der Zahl und i Teile von k in ihr. Und wir wollen eine Zahl finden, daß die ersten Bruchteile von ihr genommen um die Zahl 1 größer sind als die zweiten Bruchteile, deren Summe kleiner war.

Es sei die kleinste Zahl, welche alle die Nenner dieser Brüche insgesamt, also a, d, h, k, zählt, die Zahl m. Es sei $\frac{b}{a} m = n$, $\frac{c}{d} m = o$, $\frac{1}{e} m = p$, also die Summe der größeren Brüche $n + o + p$; ferner sei $\frac{f}{h} m = q$, $\frac{i}{k} m = r$, also die kleinere Summe der Bruchteile $q + r$. Ist nun $(n + o + p) - (q + r) = s$, so setzen wir $1 : x = s : m$ und behaupten, daß x die gesuchte Zahl ist.

(Beweisgang.

Es war $\frac{b}{a} m = n$, $\frac{c}{d} m = o$ u. s. f.

sei jetzt $\frac{b}{a} x = n^1$, $\frac{c}{d} x = o^1 \ldots$ u. s. f.,

dann ist $\frac{(p + n + o) - (q + r)}{(p^1 + n^1 + o^1) - (q^1 + r^1)} = \frac{m}{x}$, aber nach der Bestimmungsgleichung für x ist $\frac{1}{x} = \frac{s}{m}$, daraus

„durch Vertauschung“ $\frac{m}{x} = \frac{s}{1}$,

also $\frac{(p + n + o) - (q + r)}{(p^1 + n^1 + o^1) - (q^1 + r^1)} = \frac{s}{1} = \frac{(p + n + o) - (q + r)}{1}$

daher $(p^1 + r^1 + o^1) - (q^1 + r^1) = 1$ w. z. b. w.)

Die §§ 55—62 behandeln einige Aufgaben, die der des § 54 verwandt sind, ferner die Formel für den Kubus einer Summe.

Kombinationslehre.

Vorbemerkung.[28]) Zwei Elemente[29]) können sich auf zweierlei Art in der Reihenfolge ihrer Kombination[30]) unterscheiden, indem entweder das eine dem anderen oder dieses jenem vorangeht. Eine Verschiedenheit in den Kombinationen von Elementen ist auf 2 Weisen möglich; entweder unterscheiden sie sich in ihren Elementen, oder sie unterscheiden sich nur in der

Reihenfolge [derselben]. Unterscheidet sich eine Kombination von Elementen von einer anderen in irgend einer Weise, und mit beiden wird ein und dasselbe Element kombiniert, so bleiben sie nach wie vor verschieden; z. B.: ist die Kombination (a, b, c) von der Kombination (b, c, d) unterschieden in ihren Elementen und mit jeder von beiden Kombinationen wird h kombiniert, so das die Kombinationen (a, b, c, h), (b, c, d, h) entstehen, so sind diese in derselben Weise wie die ersten von einander verschieden. So ist es auch, wenn die Kombinationen sich nur in der Reihenfolge unterscheiden, denn wird h mit jeder der Kombinationen (a, b, c), (b, a, c) kombiniert und die Anordnung bleibt unverändert, so sind die Kombinationen (h, a, b, c) (h, b, a, c) in derselben Hinsicht wie die ursprüglichen von einander verschieden.

Die Anzahl von Kombinationen, die aus einer gegebenen Anzahl von Elementen entstehen können, ist der Anzahl von Kombinationen gleich, die aus derselben gegebenen Anzahl anderer Elemente enstehen können, wenn nur die (neuen) Kombinationen in Analogie zu den ersten Kombinationen stehen, d. h. sind die ersten Kombinationen verschieden in der Zusammensetzung, so sollen es auch die anderen sein; und sind die ersten Kombinationen in ihrer Anordnung verschieden, so sollen sich auch die anderen nur in der Reihenfolge unterscheiden. Kombiniert man mit einer gegebenen Kombination von Elementen verschiedene Elemente, so unterscheiden sich die [entstehenden] Kombinationen in ihrer Zusammensetzung; wird beispielsweise (a, b, c) sowohl mit d zu (d, a, b, c) als mit h zu (h, a, b, c) kombiniert, so sind die Kombinationen (d, a, b, c) und (h, a, b, c) in ihrer Zusammensetzung verschieden.

§ 63.

Ist die Anzahl der Permutationen[31]) einer gegebenen

Zahl, so ist die Zahl von Permutationen der auf die gegebene folgenden Zahl von verschiedenen Elementen gleich dem Produkt der früheren Anzahl von Permutationen in die auf die gegebene folgende Zahl.

Seien die Elemente a, b, c, d, e: ihre Zahl g und die auf g folgende Zahl sei h. Ist nun die Zahl der Permutationen der Elemente a, b, c, d, e gleich i, und sind die Elemente a, b, c, d, e, f an Zahl der Elemente um 1 größer als a, b, c, d, e, also gleich h, so behaupten wir, daß die Anzahl der Permutationen der Elemente a, b, c, d, e, f gleich i . h ist.

B e w e i s.

Indem f an die Elemente sich angliedert, werde es [zunächst] als erstes an jede der Permutationen von (a, b, c, d, e) angeschlossen; dann werden die Permutationen, wo f an erster Stelle steht, i an Zahl sein. Ebenso aber wie die Anzahl der Permutationen von (a, b, c, d, e) gleich i ist, wird es auch i Permutationen von (a, b, c, d, f,) geben. Werde nunmehr e als erstes an jede dieser letzten Permutationenen angliedert, (die dadurch nicht aufhören nur Permutationen [der h-Elemente] zu bleiben), so gibt es i Permutationen, wo e an erster Stelle steht. So kann offenbar jedes dieser Elemente an erster Stelle stehen, und es gibt i Permutationen, wo es an erster Stelle steht. Also sind alle diese Permutationen zusammen gleich i multipliziert mit der Anzahl der Elemente . . .

Es ist klar, daß unter diesen Permutationen, die wir hier aufgezäht haben, nicht zwei gleiche sind. Denn während eins der Elemente an erster Stelle stand, entstanden keine gleiche Permutationen, denn die Permutationen, die mit ihm verbunden wurden, waren verschieden, also bleiben sie selbst noch der Vereinigung mit dem Element [an erster Stelle]

Zahl von verschiedenen Elementen eine bestimmte verschieden. Und ohne Zweifel werden die Permutationen andere, wenn das erste Element ein anderes wird.

Und wir behaupten auch, daß es keine Permutationen außer diesen gibt, denn wäre das möglich, so wäre diese Permutation etwa (d, f, e, c, a, b); aber d ist doch mit den übrigen Elementen in allen Permutationen kombiniert worden und eine derselben war (f, e, c, a, b), also muß auch (d, f, e, c, a, b) eine der von uns aufgezählten Permutationen sein. Da das so ist, d. h. da unter diesen Permutationen keine zwei gleiche sind, es aber auch keine außer diesen gibt, so bestätigt sich unser Satz.

Hier zeigt es sich also, daß die Anzahl der Permutationen von irgend welchen Elementen, der Zahl gleich ist, die sich aus den Folgezahlen von 1 an bis zu der Zahl, die gleich der Zahl dieser Elemente ist, zusammensetzt[32]). Denn die Permutationen von zwei [Elementen] sind 2, dies ist gleich der Zahl, die aus 1 und 2 sich zusammensetzt, und die Permutationen von 3 sind gleich $2 \cdot 3 = 1 \cdot 2 \cdot 3$ und so wird es weiter bis ins Unendliche dargetan.

§ 64.

Die Anzahl der Kombinationen[33]) zu je 2, die sich in ihren Elementen oder in deren Reihenfolge unterscheiden, aus einer gegebenen Anzahl von verschiedenen Elementen ist gleich dem Produkt aus der gegebenen Zahl in die ihr vorangehende.

Es seien (a, b, c, d, e) die Elemente, ihre Anzahl gleich g und die g vorangehende Zahl gleich f...

Beweis. Werde a an die erste Stelle gesetzt und mit jedem der f Elemente verbunden, dann ist die Anzahl der verschiedenen Kombinationen, solange a das erste Element bildet, gleich f. So ist klar, daß jedes dieser Elemente als erstes gesetzt werden kann, und die Anzah der verschiedenen Kombinationen, wo es an erster Stelle steht, gleich f ist. Also ist die Anzahl sämtlicher Kombinationen dieser Art gleich f, multipliziert mit der Anzahl dieser Elemente.

(Es folgt' wie im vorigen Satze, der Nachweis, daß keine Kombination doppelt gezählt und keine ausgelassen sei.)

§ 65.

Hat man eine gegebene Zahl verschiedener Elemente, und ist die Anzahl der in ihrer Zusammensetzung oder Anordnung verschiedenen Kombinationen dieser Elemente zu einer mit einer zweiten gegebenen Zahl bezeichneten Klasse, die von der ersten gegebenen Zahl verschieden und zwar kleiner als sie ist, irgend eine gegebene dritte Zahl, so ist die Anzahl der in Zusammensetzung oder Anordnung verschiedenen Kombinationen, zu der auf die durch die zweite Zahl bezeichneten nachfolgenden Klasse gleich dem Produkt aus der dritten gegebenen Zahl in den Überschuß der ersten über die zweite.[34])

Es seien die Elemente a, b, c, d, e, f g, ihre Anzahl gleich i, und $h < i$; es seien die verschiedenen Kombinationen zur h^{ten} Klasse gleich l und es sei m die auf h folgende Zahl, und $i - h = k$; so behaupten wir, das die verschiedenen Kombinationen dieser Elemente zur m^{ten} Klasse an Zahl gleich dem Produkt $l \cdot k$ sind.

B e w e i s. Nehmen wir an, eine der Kombinationen zur h^{ten} Klasse sei (a, b, c), dann sind die übrigen Elemente d, e, f, g, deren Anzahl gleich k ist. Werde nunmehr jedes von diesen Elementen d, e. f, g als erstes mit der Kombination (a, b, c) kombiniert, so sind die Kombinationen verschieden und die Anzahl der Elemente gleich m in jeder von ihnen. . . . . Der Elemente d, e, f, g gab es aber k, es werden also die neu sich bildenden, aus (a, b, c) hervorgehenden Kombinationen gleich k sein, also die Anzahl der neuen Kombinationen, die durch Verbindung mit jeder der Kombinationen zur h^{ten} Klasse entstehen, gleich k sein. Daher wird die Anzahl dieser Kombinationen insgesamt, ich meine die Anzahl der Kombinationen dieser Elemente zur m^{ten} Klasse gleich k, multipliziert mit der Anzahl der Kombinationen dieser Elemente zur h^{ten} Klasse, . . . d . h . gleich k . l sein.

(Wiederum wird nachgewiesen, daß alle diese Kombination von einander verschieden, und daß außer ihnen keine anderen vorhanden sind).

So zeigt es sich, daß die Kombinationen zu einer gegebenen Klasse aus einer gegebenen Zahl von verschiedenen Elementen der Zahl gleich ist, die sich aus den Folgezahlen zusammensetzt, deren Anzahl gleich der gegebenen Klassenzahl und deren größte die andere gegebene Zahl ist.

Sei 7 die Anzahl der Elemente der Folgezahlen 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7. Dann ist offenbar:

Kombinationen zu je zwei gibt es 6 . 7 . . .

Kombinationen zu je zwei gibt es 5 . 6 . 7 . . .

Und so ist es klar, daß die Anzahl der Kombinationen zu je 4 von ihnen gleich 4 . 5 . 6 . 7 ist; und so ist es für jede beliebige Zahl ersichtlich.

§ 66.

Ist eine Zahl verschiedener Elemente gegeben, und ist die Zahl der Kombinationen dieser Elemente zu einer bestimmten Klasse, die sich in ihrer Zusammensetzung von einander unterscheiden,[35]) eine gegebene dritte Zahl und die der nur in der Reihenfolge verschiedenen Kombinationen von verschiedenen Elementen, deren Anzahl gleich der [obengenannten] Klassenzahl ist, eine gegebene vierte Zahl: so ist die Anzahl von Kombinationen aus den obigen Elementen, die sich entweder in ihrer Zusammensetzung oder in ihrer bloßen

Reihenfolge unterscheiden, zu derselben Klasse gleich dem Produkt aus der gegebenen dritten in die vierte Zahl. [35])

Seien a, b, c, d, e, f diese Elemente, an Zahl g, und die ihrer Zusammensetzung nach von einander verschiedenen Kombinationen derselben zur h^{ten} Klasse gleich i, und die Anzahl der Permutationen von h verschiedenen Elementen gleich k, so behaupte ich, dass die Anzahl der Variationen o. W. der g Elemente a, b, c, d, e, f zur h^{ten} Klasse gleich dem Produkt i. k ist.

B e w e i s. Nehmen wir an, daß (b, c, d) eine der Kombinationen ohne Wiederholung dieser Elemente zur h^{ten} Klasse sei; aus ihr bilden sich durch Permutation k andre Komplexionen; so ist es ersichtlich, daß aus jeder der Kombinationen ohne Wiederholung zur h^{ten} Klasse sich k Permutationen bilden können; also ist die Anzahl der Variationen insgesamt gleich der Zahl der Kombinationen o. W. zur h^{ten} Klasse multipliziert mit k, c . . . d. h. gleich i. k.

(Dabei ist keine Auslassung und keine Wiederholung vorgekommen, was auch hier bewiesen wird.)

§ 67.

Ist eine Anzahl verschiedener Elemente gegeben und die Anzahl der Variationen o. W. zu einer (durch eine zweite Zahl) bestimmten Klasse eine gegebene dritte Zahl und die Anzahl der Permutationen von verschiedenen Elementen, deren Anzahl gleich der zweiten gegebenen Zahl ist, eine vierte gegebene Zahl, so ist die Anzahl der Kombinationen o. W. der obigen Elemente zu derselben Klasse gleich der Zahl, die angibt, wie oft die vierte Zahl die dritte zählt.

(Der Beweis folgt aus § 66.)

§ 68.

Ist eine Anzahl verschiedener Elemente gegeben und die Anzahl der Kombinationen dieser Elemente ohne Wiederholung zu einer (durch eine gegebene zweite Zahl bestimmten Klasse eine gegebene dritte Zahl und der Überschuß der ersten gegebenen über die dritte eine gegebene vierte Zahl, so ist die Anzahl der Kombinationen o. W. zu der durch die vierte Zahl bestimmten Klasse gleich der dritten gegebenen Zahl [36]).

Seien die Elemente a, b, c, d, e, f, g, an Zahl h und die Kombinationen o. W. dieser Elemente zur i^{ten} Klasse gleich k; sei ferner l der Überschuß von h über i, so behaupte ich, daß die Kombinationen o. W. zur l^{ten} Klasse ebenfalls an Zahl gleich k sind.

Wir erläutern zunächst, daß, wenn zwei Kombinationen dieser Elemente (zu irgend welcher Klasse) verschieden von einander sind, daß dann auch die Kombinationen der noch übrigen Elemente in ihrer Zusammensetzung verschieden sind. Nehmen wir nämlich an, die Kombinationen (a, b, c, d) und (a, c, d, e) sind ihrer Zusammensetzung nach verschieden. Dann ist nach Abtrennung von (a, b, c, d) übrig (e, f, g)
„ „ „ (a, c, d, e) „ (b, f, g)
und wir behaupten, daß (e, f, g) und (b, f, g) ihrer Zusammensetzung nach verschieden sind. Denn wäre es anders, so müßte e = b sein. Dann aber sind (a, b, c, d) und (a, c, d, e) nicht ihrer Zusammensetzung nach verschieden, was aber nach Voraussetzung der Fall sein müßte. Also wäre dies ein Widerspruch. Also müssen notwendig die Kombinationen der Restelemente verschieden sein, wenn die ursprünglichen verschieden waren. Nachdem dies dargetan ist, wollen wir zeigen, daß die Kombinationen dieser Elemente zur l^{ten} Klasse o. W. ebenfalls gleich k sind.

Und zwar nehmen wir von jeder der Kombinationen o. W. zur i^{ten} Klasse die Kombination der Restelemente, deren Anzahl gleich l ist. Da die ersten ihrer Zusammensetzung nach sich unterschieden, müssen es auch die zweiten tun, und da wir aus jeder der Kombinationen

o. W. zur i^{ten} Klasse eine Kombination der Restelemente erhielten, so muß die Anzahl der neuen Kombinationen gleich der der ursprünglichen sein.

(Auch hier wird bewiesen, daß alle Kombinationen von einander verschieden sind und keine ausgelassen ist.)

Dies Resultat können wir auch durch einen anderen Beweis dartun. Nehmen wir nämlich an, wir hätten 8 Elemente, die Folgezahlen bis zu 8 seien 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8 . . . die Klassenzahl sei 3, $8-3=5$; so behaupte ich, daß die Kombinationen o. W. zur dritten Klasse an Zahl gleich denen zur 5^{ten} Klasse sind.

Denn die zur dritten Klasse sind gleich dem Quotienten $\frac{6 \cdot 7 \cdot 8}{1 \cdot 2 \cdot 3}$ und die Kombinationen zur zur fünften Klasse sind gleich $\frac{4 \cdot 5 \cdot 6 \cdot 7 \cdot 8}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5}$ und ich behaupte, daß das Produkt $1 \cdot 2 \cdot 3$ so oft in $6 \cdot 7 \cdot 8$ enthalten ist, wie $1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5$ in $4 \cdot 5 \cdot 6 \cdot 7 \cdot 8$. Nun ist $1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot (4 \cdot 5) = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5$ und $(4 \cdot 5) \cdot 6 \cdot 7 \cdot 8 = 4 \cdot 5 \cdot 6 \cdot 7 \cdot 8$. Also mit der zusammengesetzten Zahl $4 \cdot 5$ ist sowohl $1 \cdot 2 \cdot 3$ als $6 \cdot 7 \cdot 8$ multipliziert; also ist das Verhältnis der zusammengesetzten Zahl $1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5$ zu $4 \cdot 5 \cdot 6 \cdot 7 \cdot 8$ gleich dem Verhältnis der zusammengesetzten Zahlen $1 \cdot 2 \cdot 3$ zu $6 \cdot 7 \cdot 8$. Daher ist die Anzahl der Kombinationen o. W. zur 3^{ten} Klasse von 8 Elementen gleich der Anzahl der Kombinationen zur 5^{ten} Klasse. . . . . . .

So ist es klar, daß die Kombinationen o. W. zu welcher Klasse immer von verschiedenen Elementen gleich sind den Kombinationen o. W. zu der Klasse, deren Zahl die Differenz der Anzahl der Elemente und der ersten Klassenzahl ist, und das wollten wir nachweisen.

Damit ist das erste Buch beendet.

Lob sei Gott!

Das zweite Buch.

Einführung. [Die Eins.] Wisse, daß die Weisen[1] Gott in der Welt der separaten Intelligenzen mit der Eins unter den Zahlen vergleichen[2]. Das ist fürwahr kein Zufall[3]. Denn Eins ist die Grundlage jeder Zahl[4], sie die Ursache ihres Daseins[5], sie bringt alle Zahlen hervor[6], ist in allen enthalten und doch ihnen nicht gleichartig[7]. Denn sie selbst ist keine Zahl, außer wenn sie geteilt wird und dann ist sie nicht 1[8]. Stellt man sich vor, es gäbe keine Eins, so gäbe es überhaupt keine Zahlen; stellt man sich jedoch vor, es gäbe keine Zahlen, so würde [die Eins] nicht zu existieren aufhören. Sie hat als Zahl weder Anfang noch Ende, während allen Zahlen von gewissen Gesichtspunkten aus Anfang und Ende zukommt[9]. Wird für 1 als Zahl eine Begrenzung angenommen, so ist es nur insofern, als sie geteilt wird, dann aber ist sie nicht mehr 1. Wir sagen: als Zahl. Denn insofern sie eine Linie oder Fläche oder einen Körper darstellt, hat sie Begrenzungen und zwar bei der Linie Punkte, bei der Fläche Linien, bei dem Körper Flächen, die sie einschließen. Jedoch kommen diese Begrenzungen ihr nicht als Zahl zu, denn die Linie kann nicht in Punkte geteilt werden, kann auch nicht aus ihnen zusammengesetzt werden. Die Fläche zerfällt nicht in Linien und setzt sich aus ihnen nicht zusammen, der Körper zerfällt nicht in Flächen und setzt sich aus ihnen nicht zusammen[10]. Siehe, alle Zahlen haben einen Ursprung, von ihm gehn sie aus und zu ihm kehren sie zurück[11]. Denn wenn man die Einer summiert bis zehn, so ist 10 wieder 1, und 20 ist wie 2 und 30 wie 3 und 40 wie 4. Also geht es weiter, bis man zu 100 kommt, dann ist dies 1 und 200 wie 2 und 300 wie 3 usf. bis 1000, welche wiederum 1 ist. Und so ins Unendliche.

Positionssystem. Siehe, dadurch ist ersichtlich, daß alle Zahlen bei 9 enden. Die Eins und was zu ihr gehört von den Einern bis 9 heißt die erste Ordnung[12]. Und zehn und was zu ihr von den Zehnern bis 90 gehört, heißt die zweite Ordnung. Und hundert und was von den Hunderten bis 900 zu ihr gehört heißt die dritte Ordnung. Und 1000 und was zu ihr von den Tausenden bis 9000 gehört, heißt die vierte Ordnung. So geht es fort nach Ordnungen, die zu einander in Proportion stehen, bis ins Unendliche, d. h. jede Ordnung verhält sich zu der vorhergehenden wie 10 [zu 1]. Wir sagen: bis ins Unendliche[13], denn die Zahl kann hinzugefügt werden zu dem, was bereits hinzugefügt ist, d. h. so viel du auch hinzufügen magst, immer kannst du die Zahl von neuem vermehren[14]; es gibt dabei keine unendlich große Zahl. Denn es ist klar, von welcher Zahl immer, daß sie ein Ende hat und ihr Ende ist die Eins, mit der sie aufhört. Kurz wir behaupten, daß eine Zahl, die unendlich ist, offenbar ihrer Natur nach undenkbar ist[15], denn das Eigentliche einer Zahl und ihr Wesen ist, die Grenze [die begrenzte Menge] von Teilen, die sie umfaßt, anzugeben. Noch ein Beweis. Jede Zahl ist notwendig entweder grade oder ungrade, darin liegt ihre Begrenzung.

Daher kann die Sache auch nicht umgekehrt sein, d. h. die Zahl nicht geteilt und ständig weiter geteilt werden, wie man dies von der Linie aussagen kann, sondern notwendig gelangen wir zu 1 und dort müssen wir Halt machen. Jedoch kann die 1 als Zahl das Schicksal haben, daß sie geteilt und weiter geteilt wird, sofern sie benannte Zahl ist[16]. So tun es die Astronomen, wenn sie die Genauigkeit der Rechnung erhöhen wollen. Sie teilen die 1 in 60 Teile und nennen sie „erste Brüche", jeden dieser Bruchteile teilen sie weiter und nennen sie „zweite Brüche" und so gehen diese Teilungen in Bruchteile proportional weiter ohne Ende, und ihr Ursprung, d. h. ihr Anfang ist die erste Ordnung, d. h. die betreffende Einheit[17].

Systematik. Wenn eine Zahl gesucht wird, so kann das auf zwei Weisen geschehen, entweder durch Vereinigung oder durch Verringerung[18]. (Was nicht unter diese Kategorien fällt, das ist von selbst bekannt)[19].

Vereinigung ist auf zwei Weisen möglich: entweder vereinigen wir gleiche Zahlen[20] oder ungleiche. Die Vereinigung ungleicher Zahlen ist auf drei Arten möglich[21]: entweder unterscheiden sie sich ihrer Größe nach[22], oder sie unterscheiden sich in ihren Elementen und sind der Größe nach gleich[23], oder sie sind an Größe wie in den Elementen gleich und nur in der letzteren Anordnung verschieden[24].

Verschieden in ihrer Größe können die Zahlen[25] in zwei Fällen sein; indem entweder die Zahl oder die Zahlen, die wir hinzufügen wollen, bekannt sind oder nicht bekannt sind. Dies letztere ist wiederum in zwei Weisen möglich: entweder nehmen die Zahlen in gleichem Maße um eine im voraus angebbare Größe[26] zu — dies ist der Fall bei den „aufeinanderfolgenden Zahlen" — oder sie nehmen um eine nicht angebbare Größe zu, stehen aber in Proportion d. h. es ist das Verhältnis von diesem Gliede zu jenem, wie das des dritten zum vierten.

Verringerung ist in zwei Weisen möglich: entweder subtrahieren wir eine oder mehrere Zahlen oder dividieren eine Zahl durch eine andre. Division einer Zahl durch die andre ist in zwei Weisen möglich: entweder ist die Zahl, durch die geteilt wird, bekannt oder unbekannt, nämlich beim Ausziehen der Quadrat- und Kubikwurzeln[27]. Dies sind die Brüche, welche die einfache Division liefert[28].

Es gibt aber hier eine Operation, deren man sich in den meisten dieser Rechenarten oder bei allen bedient und das ist die Auffindung einer Zahl, deren Verhältnis zu einer bestimmten andren wie das einer gegebenen Zahl zu einer [andren] gegebenen Zahl ist, oder ähnliche Fälle, wo die Unbekannte aus Bekanntem auf diese Weise gefunden wird. Wir wollen mit Gottes Hilfe die Operationen und die Regeln, wie man die gesuchte Zahl findet, in diesem Buche erläutern; und gemäß dieser Untersuchung haben wir es in 6 Pforten eingeteilt.

Die erste Pforte: Von der Addition einer Zahl oder mehrerer zu einer Zahl, und von der Subtraktion einer Zahl oder mehrerer von einer Zahl.

Die zweite Pforte: Von der Addition gleicher Zahlen.

Die dritte Pforte: Von der Addition der aufeinander folgenden oder in Proportion stehenden Zahlen.

Die vierte Pforte: Von der Kombination einer Anzahl von Elementen, mögen sich die Kombinationen in den Elementen oder nur in deren Reihenfolge oder in beidem zugleich unterscheiden.

Die fünfte Pforte: Von der Teilung einer Zahl durch eine andere, mag nun der Divisor bekannt sein oder nicht.

Die sechste Pforte: Von den Proportionen.

Die erste und zweite Pforte übergehen wir, aus der dritten bringen wir als Beispiel:

Die geometrische Reihe. I. Wenn du wissen willst, wie groß die letzte von einer vorgeschriebenen Anzahl von Zahlen ist, die mit 1 anfangend in einem gegebenen Verhältnis zu einander stehen, so nimm das Quadrat des Verhältnisses, so hast du die dritte; nimm das Quadrat der dritten, so hast du die fünfte; das der fünften, so hast du die neunte; in solcher Weise kannst du aus dem Quadrat einer Zahl die weiter abstehende ersehen. Bist du nun bis zu einer der vorgeschriebenen nahen, aber kleineren Zahl gekommen, so merke sie dir. Dann mußt du in Erfahrung bringen, wie weit sie von der vorgeschriebenen absteht, ferner, wie groß diejenige von diesen proportionierten Zahlen ist, die eben soweit von 1 absteht. Mit dieser letzten Zahl multipliziere diejenige, die du gemerkt hattest, so hast du die gewünschte.

Willst du z. B. wissen, wie groß die letzte von 15 in [geometrischer] Proportion stehenden Zahlen ist, deren erste 1 und deren Verhältnis 3 ist, so wird die zweite Zahl 3, $9 = 3^2$ die dritte, $81 = 9^2$ die fünfte, $6561 = 81^2$ die neunte Zahl sein. Würden wir das Quadrat der neunten nehmen, so erhielten wir die 17 te, die die vorgeschriebene Anzahl bereits überschreitet. Daher sehen wir zu, wie weit die neunte von der 15 ten absteht, und siehe, sie ist die 7 te von ihr aus gezählt. Daher müssen wir in Erfahrung bringen, in welchem Verhältnis die 7te zu 1 steht. Nun wissen wir, daß 81 die fünfte Zahl und daß die 7te die dritte, von der fünften an gezählt, ist. Also multiplizieren wir 81 mit 9, der dritten Zahl, so haben wir 729, das also ist die 7te. Multipliziere die 7te mit der 9ten, so erhältst du die 15te und zwar 4 782 989.

(Der Beweis dafür, daß das Quadrat des dritten Gliedes das fünfte liefert, liegt in der Proportion:

Glied 1 zu Glied 3 wie Glied 3 zu Glied 5, also

$[\text{Glied } 3]^2 = \text{Glied } 5.$

Genau entsprechend für alle folgenden Glieder.]

II. (Ist das erste Glied nicht 1, so bilde das Endglied nach der vorigen Regel und multipliziere es mit dem Anfangsglied.

Z. B. das 5. Glied der Reihe, deren Gliederverhältnis 3 und deren Anfangsglied 5 ist, ist

$$5 . 81 = 405,$$

denn das gesuchte Entglied verhält sich zu 81 wie 5 : 1.)

III. Willst du eine Reihe von in gegebener Proportion stehenden Zahlen summieren, so subtrahiere die erste von der zweiten und sieh zu, in welchem Verhältnis die Differenz zu der ersten Zahl steht. In dem gleichen Verhältnis steht die Differenz der letzten und ersten Zahl zu allen vorhergehenden. Das ist bereits am Ende des 9. Buches von Euklid dargetan.

(Beispiel. In der Reihe

$$4, 12, 36, \ldots\ldots\ldots 324, 972, \text{ bilde}$$

$$\frac{4}{12-4} = \frac{4}{8} = \frac{1}{2}, \text{ dann ist}$$

$$\frac{972-4}{2} = \frac{968}{2} = 484 \text{ die Summe}$$

aller Glieder bis 324. Die Gesamtsumme also

$$484 + 972 = 1456$$[29].)

Die vierte Pforte. Von der Summe der Kombinationen gegebener Elemente, mögen sich die Kombinationen in den Elementen selbst oder in deren Reihenfolge oder in beiden Hinsichten zugleich unterscheiden[30].

I. Die Anzahl der Permutationen von n Elementen ist $n!$

II. Die Anzahl der Variationen von n Elementen o. W. zur p ten Klasse ist

$$n\,(n-1)\,(n-2)\,\ldots\,(n-p).$$

III. Kombinationen von n Elementen zur p ten Klasse o. W. gibt es:

$$\frac{n\,(n-1)\,\ldots\,(n-p)}{1.\,2.\,3.\,\ldots\,p}.$$

Die fünfte Pforte. Von der Division einer Zahl durch eine andre.

Du weißt schon, daß jedes Produkt so oft den einen Faktor in sich enthält, als der andre Faktor die Einheit. Wenn du daher das Produkt und einen der Faktoren kennst, so kannst du den zweiten Faktor finden. Das Verfahren bei dieser Operation ist folgendes: Schreibe die Flächenzahl[31] (das Produkt) in eine Reihe und darunter in einer andren Reihe den bekannten Faktor und teile die obere Reihe durch die untere ... Aber wie teilst du die obere durch die untere Reihe? ... Blicke zunächst auf die erste Zahl der unteren Reihe und die in der ihr nachfolgenden Ordnung stehende Zahl, während du alle Zahlen in den weiter folgenden Ordnungen ansiehst, als wären sie eins in der zweiten Ordnung. Was du an Einern in der ersten Ordnung der unteren Reihe erhältst, seien Einer in deiner Hand[32]; und was du an Einern in der hinter der ersten stehenden Ordnung erhältst, seien Zehntel eines ganzen Einers; merke dir dann, wieviel Einer und Zehntel du hast. Dann betrachte die erste Zahl der oberen Reihe, es seien Einer in deiner Hand, und die Einer der zweiten Ordnung seien Zehntel und nimm keine Rücksicht auf die anderen Zahlen. Und was du so an Einern und Zehnteln erhältst, mag es mehr sein als die Zahl, die du dir gemerkt hast, oder ihr gleich, berechne, wieviel mal letztere darin ganz enthalten ist; das Resultat setze in die mittlere Reihe zwischen die beiden andren und zwar in diejenige Ordnung, die soweit hinter der ersten Ordnung der oberen Reihe steht als die erste Ordnung der unteren Reihe von der Ordnung der Einer absteht. Dann multipliziere diese Zahl in der Reihe des Resultats mit der unteren Reihe, subtrahiere das Produkt von der oberen Reihe und schreibe den Rest über die obere Reihe, und streiche diese aus. War aber die erste Zahl der oberen Reihe mitsamt den Zehnteln dort nicht gleich der Zahl, die du dir gemerkt hast, so ziehe die erste Ordnung zu der folgenden und von dieser an zählst du Einer, und die Zehntel [erst] in der dann folgenden. Von der so erhaltenen Zahl bestimme, wie oft in ihr die zu merkende Zahl ganz enthalten ist, und das Resultat schreibe in die Ordnung, welche soweit hinter der nach der Reduktion als erste geltenden Ordnung der oberen Reihe steht, wie die erste Ordnung der unteren Reihe und der Einerordnung absteht, sonst aber verfahre wie vorher.....

Also bis in der oberen Reihe nichts mehr übrig bleibt, oder, im Falle die untere in der oberen nicht aufgeht, bis weniger als die untere Reihe übrig bleibt. Wir werden dir noch im folgenden mitteilen, was du mit diesem Rest tun sollst[33]. Zuweilen kann es sich treffen, daß du in der Reihe des Resultats zweimal in eine Ordnung schreiben mußt, aber nur selten kommt dieser Fall vor.

Als Beispiel dient 987654321 : 9437. Dafür findet sich im Cod. 36 folgendes Rechenschema.

Rest, der nicht zur Teilung kommt.						6	2	1	2
					7	2	2	7	1
				5	4	4	1	2	1
			6	2	0	6	3	2	1
		4	3	9	5	4	3	2	1
Reihe des Dividendus	9	8	7	6	5	4	3	2	1
Resultats				1	0	4	6	5	7
Divisors						9	4	3	7
	9	4	3	7	0	0	0	0	0
		3	7	7	4	8	0	0	0
			5	6	6	2	2	0	0
				4	7	1	8	5	0
					6	6	0	5	9[34]

Im Anschluß an die Darstellung der Gesetze der gemeinen Brüche behandelt Leo jetzt:

Astronomische Brüche.[34a] Nachdem wir dies alles dargelegt haben, ist es angebracht, daß wir dir die Methode der Division bei den Astronomen auseinandersetzen. Du weißt bereits, daß das Produkt zweier Brüche in einer Ordnung steht, die so weit hinter dem Multiplikator folgt, als der Multiplikandus vor der Ordnung der Einer absteht.[34b] Auf Grund dieses Satzes werde ich dir die Methode der Multiplikation von Ganzen und Brüchen mit Ganzen und Brücben auseinandersetzen und daraus kannst du die Methoden für alle Arten der Brüche ersehn.

Willst du Ganze und astronomische Brüche mit Ganzen und solchen Brüchen multiplizieren, so schreibe die Zahl, die weniger Ordnungen hat, nach diesen geordnet in eine Reihe und ziehe eine Linie zwischen die Ganzen und die Brüche, in der oben bereits erwähnten Weise. Schreibe dann die andre Zahl auch nach dem Stellenwert geordnet darunter, multipliziere die letzte Zahl der oberen Reihe mit der letzten der unteren und setze das Resultat in die richtige Ordnung; kommt mehr als 60 heraus, so dividiere das Resultat durch 60; was du als [Quotienten] erhältst, sind Einer in der vorhergehenden Ordnung, und den Rest setze in die richtige Ordnung ein..... So bis zu du den Einern kommst, von dort an und weiter dividiere nur durch 10. Der Grund dafür ist offenbar. So verfahre, bis alle Zahlen der oberen Reihe mit allen der unteren multipliziert sind; es werden sich dabei so viele „Reihen des Resultats" ergeben, als die obere Reihe Ordnungen zählt mit Ausnahme der Ganzen, die nur eine Resultatreihe liefern, wieviele [Ordnungen] sie auch bilden mögen. Dann addiere alles, was in den Resultatreihen steht, in einer tieferen Reihe unter allen andren, die Summe ist die gesuchte Zahl. Wenn du nun die Brüche [der oberen Reihe] mit den Ganzen [der unteren] multiplizieren sollst, so multipliziere sie auf ein mal mit allen Ganzen der unteren Reihe, damit du nicht verwirrt werdest und dividiere das Resultat durch 60 wie oben und den Rest setze jedesmal an die richtige Stelle; ebenso wenn du die Ganzen [der oberen Reihe] mit den Brüchen [der unteren] multiplizieren sollst, so multipliziere ebenfalls alle Ganzen der oberen Reihe zu gleicher Zeit mit den einzelnen Brüchen der unteren Reihe.

[83^0 9' 57" . 7098^0 40" 51''' 3" wird als Beispiel folgendermaßen berechnet.

83	9	57				
7090	0	40	51	3		
112	15	0, 30	0 38	0 48	2,27	51
3003	0, 30	6	0, 7	0, 39	57	
588470	55, 1	20, 10	33, 4	9		
589646	42	7	23	36	56	51

Willst du irgend eine Zahl durch Ganze und solche Brüche, wie wir jetzt betrachten, dividieren,. . . . . so sieh zu, welche Zahl in der ersten Ordnung der unteren Reihe steht; diese betrachte als die Einer. Die ganze Zahl, die in den Ordnungen hinter der zweiten steht, rechne als 1 in der zweiten Ordnung und addiere sie zu der dort stehenden Zahl. Stehen in der zweiten Ordnung Ganze, so sei die in ihr enthaltene Zahl als Zehntel angesehn; stehen darin sechzigstel, so addiere sie [direkt] zu den Einern der ersten Ordnung . . . . Durch die Summe, die du merken mußt, dividiere die erste Ordnung der oberen Reihe samt dem, was in ihrer zweiten Ordnung steht, seien es zehntel, seien es sechzigstel; das Resultat setze in die richtige Ordnung, wie es dir oben gezeigt ist; multipliziere es mit der unteren Reihe und subtrahiere das Resultat von der oberen Reihe. So fahre fort, bis weniger als der Divisor übrig bleibt.

Beispiel: 700⁰ 40' 50'': 9⁰ 20' 30'''

		4	28	
	2	52	28	Rest
0	40	12	30	
47	20	15		
700	40	50		Reihe des Dividendus
75	4	18		„ „ Resultats
9	20	0	30	„ „ Divisors
23	20	35	0	
63				
46	40	0 2	30	
	36 1	20	2	
	2	42 6	0	

Wie setzt man mit dem Rest die Teilung fort, wenn in der unteren Reihe Ganze vorkommen? Um dies darzulegen, machen wir darauf aufmerksam, daß die Division von Brüchen welcher Art immer durch Ganze Brüche von ebenderselben Ordnung ergibt. Das ist durch die [Gesetze der] Multiplikation klar. So sieh also zu, wieviel Primen in der obersten Reihe übrig geblieben sind, nachdem du den Dividendus bis auf die Ordnung der Primen reduziert hast; die Anzahl der Primen betrachte als die Einer. Was in der nächst niedrigeren Ordnung steht, sind sechzigstel. Deren Summe teile durch die Merkzahl[35], [nämlich die beiden ersten Zahlen des Divisors]: was herauskommt sind Primen; schreibe sie in der Reihe des Resultats an die ihnen gebührende Stelle, multipliziere sie mit der ganzen unteren Reihe und subtrahiere das Produkt von der obersten. Wiederum teile dann die erste Zahl der obersten Reihe durch die Merkzahl; kannst du sie nicht dividieren, so ziehe sie in die nächst niedrigere Ordnung hinab. Auf solche Weise kannst du das Resultat immer weiter präzisieren. Was jedoch die Aufsuchung der Merkzahl anbetrifft, so mußt du alle Ganzen der unteren Reihe in die Ordnung der Einer bringen und als solche sie handhaben; was in den niedrigeren Ordnungen steht, das sind sechzigstel wie früher.

(Obiges Beispiel, worin das Resultat, wie das Bild zeigt, weiter bis auf Sekunden präzisiert ist.)

Methode der Division, wenn die erste Ordnung der unteren Reihe von der Ordnung der Brüche ist. Wisse, daß die Division von Brüchen durch Brüche derselben Art Ganze liefert und die Division von Brüchen durch solche höherer Ordnung Brüche ergibt, deren Ordnung ebensoweit von den Ganzen absteht, als die Brüche des Dividendus von denen des Divisors.

$$\left(\frac{\text{Sekunden}}{\text{Sekunden}} = \text{Ganzen}; \quad \frac{\text{Terzen}}{\text{Primen}} = \text{Sekunden.}\right)$$

Willst du also irgend eine Zahl durch eine andre dividieren, und die erste Ordnung des Divisors sind Brüche, so blicke auf die höchste Stufe der oberen Reihe. Ist sie höher als die erste der unteren, so bringe sie in die letztere hinab, so daß die obere wie die untere Reihe mit derselben Ordnung beginnen, und alsdann teile die erste der oberen Reihe samt den benachbarten sechzigsteln wie früher durch die Merkzahl. Was herauskommt, sind Ganze; multipliziere sie mit der unteren Reihe und subtrahiere das Produkt von der oberen; weiter teile den Rest in der ersten Ordnung, der oberen Reihe durch die Merkzahl . . . und so fort bis in der oberen Reihe nichts oder eine sehr kleine Zahl übrig ist.

					7	45[36]
				42	0	30
			41	11		
		11	51	15		
R. d. Divid. 17	30	40				
Resultats 1505	16	58,1				
Divisors		41[36]	52	45[36]		
		18	48	45		
	21	44	20			
17	8	25				
		10	56 13	52 12		
			39	38 50	16 42	30
				41	52	45[37]

Damit ist die Darlegung der Division einer Zahl durch eine andre für alle Modalitäten derselben beendet.

Wurzelausziehung. Nachdem das Verfahren der Teilung einer bekannten Zahl durch eine bekannte Zahl dargelegt worden ist, ist es jetzt an der Reihe darzutun, wie man eine bekannte Zahl durch eine unbekannte teilt, wie bei dem Ausziehen der Quadrat- und Kubikwurzeln aus gegebenen Zahlen. Legen wir zunächst das Verfahren der Ausziehung von Quadratwurzeln dar. Zu diesem Ende machen wir darauf aufmerksam, daß es unmöglich ist, in Zahlen[38] eine Quadratwurzel für aus Ganzen bestehende Zahlen zu finden, deren Wurzel nicht aus ganzen Einern besteht. Denn 1 ist ein Quadrat; nun weißt du bereits aus dem 8. Buche des Euklid Satz 14, daß, wenn ein Quadrat ein anderes zählt, daß dann auch dessen Seite in der des anderen enthalten sein muß. Jetzt aber zählt 1 jede Zahl; ist also diese Zahl eine Quadratzahl, müßte 1 ihre Wurzel zählen können; aber dies ist nicht der Fall, [wenn die Wurzel nicht aus ganzen Einheiten besteht], also kann die Zahl kein Quadrat sein. Damit ist es bewiesen, daß diese Zahl unmöglich eine in Zahlen ausdrückbare Wurzel habe. Ein Beispiel dafür. Die Wurzel von 10 kann keine ganze Zahl sein; denn das Quadrat von 3 ist 9; da aber 10 größer ist als 9, muß seine Wurzel größer als 3 sein. Ebenso ist ersichtlich, daß die Wurzel von $10 < 4$ sein muß; denn $4^2 = 16$; also ist die Wurzel von 10 keine ganze Zahl. Nun zählt 1, die ein Quadrat ist, die Zahl 10; wäre 10 ein Quadrat, so müßte also $\sqrt{10}$ auch $\sqrt{1} = 1$ als Faktor enthalten; das ist aber nicht richtig, wie bereits bewiesen. Also hat 10 keine in Zahlen ausdrückbare Wurzel, keine gebrochene[39] und keine nicht gebrochene[40]; daher heißt diese Wurzel irrational[41].

Nunmehr wollen wir dir mitteilen, von welchen Ordnungen die Wurzel gezogen werden kann, von welchen nicht. Wisse: die Quadrate der Folgezahlen von 1 bis 9 sind 1, 4, 9, 16, 25, 36, 49, 64 und 81. Und da die Einheiten der Ordnungen in Proportion folgen, mit 1 beginnend, und da die der zweiten gleich 10, also kein Quadrat ist, so ist keine der Einheiten ein Quadrat, außer der ersten, dritten, fünften und so aller ungraden Ordnungen. Ist dies klar, so ist ersichtlich, daß eine Quadratzahl, die in den ungraden Ordnungen steht, ein Quadrat ist; . . . dagegen kann eine Quadratzahl, die in einer graden Ordnung vorkommt, kein Quadrat sein. So ist in den Ordnungen der astronomischen Brüche offenbar die Einheit jeder graden Ordnung ein Quadrat, die der ungraden kein Quadrat. So ist eine Prime kein Quadrat, weil sie die Zahl 1, ein Quadrat, durch 60 zählt, was kein Quadrat ist; dagegen ist eine Sekunde ein Quadrat. . . . So liefert eine Quadratzahl in den graden Ordnungen der Brüche offenbar ein Quadrat. Dies ist auch aus dem Euklidischen Beweis zu ersehen, daß in der Reihe der in Proportion stehenden Einheiten, da 1 ein Quadrat ist, auch das dritte Glied ein Quadrat sein muß; also ist die 2. Ordnung [der Brüche] ein Quadrat, und so die vierte und alle folgenden graden Ordnungen[42].

Methode der Wurzelausziehung aus ganzen Quadratzahlen.

Schreibe die Zahl, deren Wurzel du suchst, in eine Reihe entsprechend ihren Ordnungen. Dann forsche nach, ob die erste Ordnung der Reihe ungrade ist. Sonst ziehe sie zur folgenden, damit die erste Zahl in einer ungraden Ordnung steht. Dann sieh zu, welche Quadratzahl dieser Zahl zunächst kommt, jedoch die nächst kleinere [Quadratzahl] ist. Deren Wurzel schreibe in die „Reihe der Wurzel" unter die vorhergehende Reihe in die Ordnung, die in der Mitte zwischen der ersten und letzten [des Radikanden] steht; wir nennen sie *Ausgangswurzel*[43]; das Quadrat dieser Wurzel subtrahiere von der oberen Reihe; und den Rest teile durch das doppelte der bereits gezogenen Wurzel; und das, was nach der Teilung übrig bleibt, ist das Quadrat der Wurzel, die durch die Teilung sich dir ergibt. Das Resultat der Teilung, *das ist eben die sich ergebende Wurzel*, schreibe in die Reihe der Wurzel in eine Ordnung, die ebensoweit hinter der Ordnung des Dividendus steht, als der Divisor von der Einerordnung absteht. Multipliziere dann diese sich ergebende Wurzel mit der doppelten gezogenen und mit sich selbst, und subtrahiere das Produkt von der obersten Reihe. Und so verfahre, bis in der obersten Reihe nichts mehr übrig bleibt.

Beispiel. Du willst aus 82 646 281 die Wurzel ziehen. Da die erste Ordnung die achte ist, ziehe sie zur folgenden, so erhältst du 82; also ist 81 das nächste Quadrat, und 9 dessen Wurzel. Schreibe 9 in die Reihe der Wurzel an die vierte Stelle, die die Mitte zwischen der siebenten und ersten bildet. Denn das Quadrat von 9 in der vierten Ordnung ist 81 in der siebenten.

			1	8	1	8	1	
	1	6	4	6	2	8	1	
8	2	6	4	6	2	8	1	die obere Reihe
				9	0	9	1	,, Wurzelreihe

Subtrahieren wir es von 82, so bleibt 1 in der siebenten, und wir können die Division durch 2 . 9, der bereits gezogenen Wurzel, nicht ausführen; ziehen wir die 1 zu der folgenden Ordnung; [samt den 6, die bereits in ihr sich vorfinden, ergibt sich 16 und noch immer können wir nicht durch 2.9 dividieren; ziehen wir also die 16 zur folgenden Ordnung] so ergibt sich 164; bei der Division durch 2.9 = 18 kommt 9 als sich ergebende Wurzel heraus; wir schreiben sie in die Wurzelreihe an vierter Stelle hinter der Ordnung der 164. Dann multiplizieren wir sie mit der bereits gezogenen Wurzel und mit sich selbst und subtrahieren das Produkt von der obersten Reihe, in der 18181 als Rest verbleibt. Diesen teilen wir durch das Doppelte der gezogenen Wurzel und das ist nach früher dargelegtem Verfahren 18 Einer und 2 Zehntel; also kommt angenähert 1 an die letzte Stelle der Wurzelreihe; schreiben wir sie dorthin, multiplizieren sie mit dem Doppelten der gezogenen Wurzel und mit sich selbst, subtrahieren das Produkt von der obersten Reihe, so bleibt nichts übrig. Also ist 9091 die Wurzel.

Wenn du willst, kannst du dies dadurch prüfen, daß du die Wurzelreihe mit sich selbst multiplizierst, so erhältst du die obere Reihe. Dies ist so, weil wie bereits dargelegt, das Quadrat der Summe zweier Zahlen gleich der Summe der Quadrate beider Zahlen und ihrem doppelten Produkte ist.

Das Verfahren der Wurzelausziehung aus Quadratzahlen, die nicht aus ganzen Einheiten bestehen, deren Brüche aber nicht die astronomischen sind.

Suche den Generalnenner für die Brüche, d. h. die kleinste Zahl, die die Nenner dieser Brüche insgesamt als Faktoren enthält, und mit ihr, wenn sie eine Quadratzahl, oder mit ihrem Quadrat, wenn der Generalnenner keine Quadratzahl ist, multipliziere diese Zahl, ziehe aus dem Produkt die Wurzel und dividiere diese durch die Wurzel der Zahl, mit der du die [ursprünglich] gegebene multipliziert hast, das Resultat ist die gesuchte Wurzel.

Beispiel. Gesucht $\sqrt{82 + \frac{1}{4} + \frac{2}{4.7}}$; 196

ist nach den Sätzen des Euklid der Generalnenner; $196 = 4.49$ aber ist gleich $2^2.7^2$, also wird die Zahl mit 196 erweitert und ergibt

$$\sqrt{\frac{16\,129}{196}} = \frac{127}{14} = 9\,\frac{1}{2.7}\Bigg)$$

Dem ist so, weil, wie bereits bewiesen wurde, die Wurzel aus dem Produkt zweier Quadratzahlen gleich dem Produkt der Wurzeln beider Zahlen ist; also zählt die Wurzel aus dem ersten Produkt die eine Wurzel nach der Anzahl der Einheiten der anderen Wurzel.

D a s   V e r f a h r e n   der   W u r z e l a u s z i e h u n g aus einer Zahl, die kein Quadrat ist, deren Wurzel aber mit großer Annäherung in ganzen Zahlen dargestellt werden kann. Ziehe zuerst die genäherte Wurzel der Zahl in der dargelegten Weise aus, bis in der obersten Reihe weniger als das Doppelte der gezogenen Wurzel plus 1, dem Quadrat der sich ergebenden Wurzel, übrig bleibt[44]; den Rest ziehe zu den Primen und dividiere durch das Doppelte der ganzen Zahl, die in der Wurzelreihe steht, indem du sie auf Einer reduzierst; gib aber acht, daß in der obersten Reihe soviel übrig bleibt als das Quadrat der sich ergebenden Wurzel beträgt. Das Resultat [der Division] stellt Primen dar, nach dem, was wir oben dargelegt haben. Multipliziere sie mit der gezogenen Wurzel, indem du alle Ganzen in die Einerordnung ziehst und die ihnen folgenden Brüche als sechzigstel behandelst; was herauskommt, ist nach dem Vorhergehenden von derjenigen Ordnung von Brüchen, in welche wir dividiert hatten. Dorthin schreibe es auch in der Reihe des Resultats. Multipliziere es mit dem Zwiefachen der bereits gezogenen Wurzel und mit sich selbst und subtrahiere das Produkt von der obersten Reihe. Auf diese Weise kannst du die Genauigkeit soweit treiben, als es dir beliebt.

(Beispiel[45]: Gesucht $\sqrt{7654321^0\ 40'\ 30''} = 2766^0\ 38'\ 40''\ 7'''$

	11	34	53	20	
6 1	40	26			
3 5 6 5	40	30			
7 6 5 4 3 2 1	40	30			Reihe des Radikanden
2 7 6 6	38	40	7		„ der Wurzel)

Wir sehen also, daß wir zu der Wurzel mit großer Annäherung gelangt sind; denn der Rest in der obersten Reihe liefert zur Einerordnung nicht einmal 1; und das ist wenig, wenn es damit verglichen wird, um wieviel der wahre Wurzelwert mit seiner Berücksichtigung anders ausfallen würde.

Wenn du wolltest, könntest du noch genauer das Resultat berechnen, es ist das aber nicht nötig[46].

E i n e a n d e r e M e t h o d e für den Fall, daß in der Wurzel ganze Zahlen enthalten sind.

Wisse, je größer die Zahl ist, deren Wurzel wir suchen, desto schwieriger das Ausziehen derselben. So will ich dir denn zeigen, wie du aus einer großen Zahl eine kleinere machen kannst. Vorausgeschickt sei, daß die Multiplikation einer Zahl mit 36'' dasselbe ist wie ihre Division durch Hundert; denn 36'' = $^1/_{100}$, weil die in 1 enthaltene Anzahl von Sekunden 3600 beträgt. Ist dir dies klar, so teile deine große Zahl durch 100; diese Teilung ist sehr leicht, soweit die Division aufgeht; was aber nicht durch hundert geteilt werden kann, multipliziere mit 36''; was du so an Ganzen und Brüchen erhältst, ist die große Zahl, einmal reduziert. Ist aber die so reduzierte Zahl nicht kleiner als 100, erniedrige sie in derselben Weise noch einmal, bis sie kleiner als 100 geworden ist. Die letzte reduzierte Zahl ist die, deren Wurzel aufgesucht wird. Diese kannst du nun mit großer Leichtigkeit finden, sie genau bis auf Quinten und Sechsten präzisieren, um eine Berechnung von außerordentlicher Annäherung zu haben. Hast du sie gefunden, so blicke auf die Zahl der Reduktionen und setze eine Zahl so oft aus 10 zusammen, als die Anzahl der Reduktionen beträgt; denn deren Zahl ist um 1 kleiner als die Zahl der Ordnungen der Wurzel[47]. Mit dem Produkt multipliziere die gefundene Wurzel; was herauskommt, ist das Gewünschte.

Beispiel. Wir suchen $\sqrt{98754321}$; dividieren wir diese Zahl durch 100 und multiplizieren den Rest, der nicht aufging, mit 36'', so erhalten wir $987543^0\ 12''\ 36''$. Dies ist die erste Reduktion. Da das Resultat nicht kleiner als 100 ist, teilen wir die Reihe, die sich uns ergeben hat, noch einmal durch 100 und multiplizieren den Rest mit 36'', so erhalten wir $9875^0\ 25'\ 55''\ 33'''\ 36''''$ Teilen wir die erhaltene Reihe noch einmal durch 100 in derselben Weise wie vorher, so ergibt sich uns $98^0\ 45'\ 15''\ 33'''\ 20^{IV}\ 9^{V}\ 36^{VI}$, eine Zahl, die kleiner ist als 100, also nicht weiter erniedrigt zu werden braucht. Es sind also 3 Reduktionen vorgenommen worden. Suchen wir nun die Wurzel der erniedrigten Zahl in der bereits bekannten Weise, so finden wir, $9^0\ 56'\ 15''\ 4'''\ 30^{IV}\ 26^{V}\ 52^{VI}\ 52^{VII}$ als Wert der Wurzel mit großer Annäherung; und zwar ist dieser Näherungswert quadriert um

$$2^{VII}\ 52^{VIII}\ 7^{IX}\ 50^{X}\ 35^{XI}\ 38^{XII}\ 53^{XIII}\ 4^{XIV}$$

zu groß. Merke dir diese Zahl. Da die Anzahl der Reduktionen 3 ist, so multiplizieren wir die Wurzel mit 1000; denn die aus 10.10.10 zusammengesetzte Zahl ist 1000. Das Resultat ist also:

$$9937^0\ 31^{I}\ 15^{II}\ 7^{III}\ 28^{IV}\ 1^{V}\ 6^{VI}\ 40^{VII};$$

und dies ist die Wurzel der gesuchten Zahl in Annäherung. Um die Annäherung zu kennen, multipliziere die erste Näherungszahl, die du dir gemerkt hattest, mit 1000^2; dann liegt dieser Näherungswert auf derselben Seite wie der erste; er beträgt also:

[im Text

$13^{IV}\ 16^{V}\ 54^{VI}\ 5^{VII}\ 20^{VIII}\ 35^{IX}\ 34^{X}\ 34^{XI}\ 4^{XII}\ 26^{XIII}\ 40^{XIV}$

$9^{IV}\ 44^{V}\ 18^{VI}\ 32^{VII}\ 0^{VIII}\ 32^{IX}\ 34^{X}\ 34^{XI}\ 4^{XII}\ 26^{XIII}\ 40^{XIV}$][48]

Das ist eine weitgehende Annäherung bei einer so großen Zahl; denn der [Fehler] des Näherungswertes erreicht quadriert noch nicht ein Viertel einer Terze.

Dieses Verfahren begründet sich wie folgt: die erste Reihe zählt die zweite reduzierte, nach der in 100 enthaltenen Zahl von Einheiten oder die zweite Reihe mal 100 ergibt die erste. Ebenso ist die bei der letzten Reduktion gewonnene Reihe mal $1\,000\,000 = (100)^3$ gleich der ersten Reihe, oder das Verhältnis der ersten zur letzten Reihe ist gleich 1 000 000. Ferner: das Verhältnis der großen Wurzel zur kleinen ist 1000, das des Quadrats der großen Wurzel zu dem der kleinen gleich 1 000 000. Also verhält sich das Quadrat der großen Wurzel zu dem der kleinen wie die erste Reihe zu der letzten, oder bei Vertauschung [der inneren Glieder], es verhält sich das Quadrat der großen Wurzel zur ersten Reihe wie das der kleinen zur letzten. Aber das Quadrat der kleinen Wurzel ist angenähert gleich der letzten Reihe und das Quadrat der großen angenähert gleich der ersten Reihe. Nun war das Quadrat der kleinen Wurzel größer als die letzte Reihe, also ist auch das Quadrat der großen Wurzel größer als die erste. Bilden wir die Differenz [von Zähler und Nenner der Proportion], so verhält sich das Quadrat der großen Wurzel zu seinem Überschuß über die erste Reihe wie das Quadrat der kleinen Wurzel zu seinem Überschuß über die letzte Reihe, oder, umgetauscht, die beiden Wurzeln verhalten sich zueinander wie die beiden Überschüsse. Die große Wurzel quadriert ist aber das millionenfache des Quadrates der kleinen, also ist schließlich der Überschuß des Quadrats der großen Wurzel über die erste Reihe gleich dem millionenfachen des Überschusses der ins Quadrat erhobenen kleinen Wurzel über die letzte Reihe[49].

Methode der Wurzelausziehung aus astronomischen Brüchen. Sieh zu, ob die höchste der vorhandenen Ordnungen eine grade ist. Ist sie ungrade, so ziehe sie zur vorhergehenden, damit sie zu den graden gehöre. Aus ihr ziehe dann die wahre oder genäherte Wurzel; im letzteren Falle aber die nächst kleinere; und setze sie in die Ordnung, die zwischen dieser und 1 in der Mitte liegt. Bleibt etwas übrig, so ziehe es zu der folgenden Ordnung, bis du es durch das Doppelte der bereits gezogenen Wurzel dividieren kannst; das, was bei der Division herauskommt, setze in die Ordnung, die ebenso weit von der des Dividendus steht, als der Divisor von der Einerordnung absteht. Auf diese Weise kannst du das Resultat so genau berechnen, wie du willst.

(Beispiel: $\sqrt{13^{\mathrm{III}} 45^{\mathrm{IV}}\ 50^{\mathrm{V}}\ 25^{\mathrm{VI}}} = 28^{\mathrm{II}}\ 44^{\mathrm{III}}\ 15^{\mathrm{IV}}$)

Die Methode der Ausziehung von Kubikwurzeln.

Um sie darlegen zu können, weisen wir darauf hin, daß ein Teil der Zahlen keine Kubikwurzel besitzt, die sich in Zahlen ausdrücken ließe. Denn es ist bewiesen, daß, wenn ein Würfel einen andren als Teil in sich enthält, so enthält auch die Seite des einen die des andren in sich. Daraus geht für aus Ganzen bestehende Zahlen hervor, daß es unmöglich ist, für sie eine zählbare Kubikwurzel zu finden. Gesetzt nämlich, es existierte eine Kubikwurzel, ohne daß die Zahl eine Kubikzahl ist. Da diese Zahl aber ein Vielfaches von 1 ist und 1 eine Kubikzahl, so müßte ihre Kubikwurzel auch ein Vielfaches von $\sqrt[3]{1} = 1$ sein; dann aber müßte die Wurzel aus ganzen Zahlen bestehen; wir haben aber angenommen, daß die Wurzel nicht ganzzahlig sein kann; so kommen wir also auf einen Widerspruch. Also ist die Zahl nicht der Kubus [einer angegebenen anderen].

So ist offenbar weder 10 noch 60 ein Kubus, und es ist daher unmöglich, eine Kubikwurzel für sie anzugeben. Nun stehen die Einheiten der aufeinander folgenden Ordnungen in Proportion und weder die zweite, die gleich 10 ist, noch die dritte, nämlich 100, bilden einen Kubus; also sind nur die der vierten, siebenten und zehnten . . . . . Ordnung Kubikzahlen, d. h. der Ordnungen, die Vielfache von 3, vermehrt um 1, darstellen. So ist klar, daß es in den Ordnungen der

Brüche keine „kubische Ordnung“ gibt außer der dritten, sechsten, neunten usf., deren Zahl ein Multiplum von 3 ist.

Die Kuben der Folgezahlen von 1 bis 9 sind:

1; 8; 27; 64; 125; 216; 343; 512; 729; also ist offenbar eine Kubikzahl in kubischer Ordnung eln Kubus; denn sie zählt die kubische Einheit [dieser Ordnung] nach einer Kubikzahl; oder: das Produkt zweier Kubikzahlen ist notwendig wieder eine Kubikzahl. So ist offenbar eine Kubikzahl in einer nicht kubischen Ordnung kein Kubus.

Nachdem dies alles klar bewiesen ist, wollen wir nun zeigen, wie die Kubikwurzel für ganzzahlige Kubikzahlen und die genäherte Wurzel für andre Zahlen gefunden werden kann. Schreibe die Zahl, deren Wurzel du suchst, in einer Reihe geordnet nieder. Dann sieh zu, ob die erste Ordnung eine kubische ist, sonst ziehe sie zu der folgenden, bis sie in eine kubische Ordnung zu stehen kommt. Diese in kubischer Ordnung stehende Zahl vergleiche mit den obengenannten Kuben, und nimm die ihr zunächstliegende, aber kleinere Kubikzahl, deren Wurzel dir bekannt ist. Diese Wurzel schreibe in die Reihe der Wurzel in diejenige Ordnung, die wir jetzt darlegen wollen. Nämlich: Teile die Zahl, welche die Höhe dieser Ordnung angibt, durch 3, so bleibt notwendig[50] 1 als Rest. Addiere diese 1 zu dem Quotienten, so hast du in der Summe die Ordnungszahl der Wurzel. Z. B.: ist die höchste Ordnung die dreizehnte, so dividiere 13 durch 3, so kommt 4 heraus, 4 samt der 1 des Restes der Division gibt 5, also setze die Wurzel in die fünfte Ordnung. Denn die fünfte Ordnung mit sich selbst multipliziert, ergibt die neunte, diese, nochmals mit der fünften multipliziert, die dreizehnte. . . . Ziehe dann den Kubus der sich ergebenden Wurzel von der oberen Reihe ab; was übrig bleibt, sei als „erster Rest“ bezeichnet. Nimm alsdann die gezogene Wurzel, addiere zu ihr 1 von der vorhergehenden Ordnung und multipliziere die Summe mit der gezogenen Wurzel, deren Produkt mit 3[51] und merke dir das Resultat. Ist die Merkzahl kleiner als der erste Rest, so dividiere letztere durch die erstere, nur mußt du darauf achten, daß dir der Kubus der sich bei der Division ergebenden Wurzel als Rest übrig bleibt, ferner aber, daß in der oberen Reihe eine Zahl bleibt, die sich so zu der dividierten verhält, wie die sich ergebende Wurzel weniger 1 zu der Summe der gezogenen und der sich ergebenden[52]; d. h. war die [gezogene] Wurzel 6 von einer gewissen Ordnung und die sich ergebende 5 von der nachfolgenden Ordnung, so soll von der dividierten Zahl ein Rest bleiben, der sich so angenähert zu dieser verhält wie 4 zu 65, das ist schwer beim „ersten Rest“[53]. Aber von da an und weiter reicht auch eine kleine Größe im Rest für den Kubus der sich ergebenden Wurzel aus[54].

Um es dir leichter zu machen, gebe ich dir eine naheliegendere Methode inbetreff des ersten Restes an; und zwar folgende: Sieh zu, um wieviel der Kubus der auf die gezogene Wurzel folgenden Zahl[55] größer als der Kubus der Wurzel selbst ist. Durch ein Zehntel dieses Überschusses teile den ersten Rest und die bei der Division sich ergebende Wurzel gibt Einer der Ordnung an, die auf die der gezogenen Wurzel folgt[56].

Hast du dies ausgeführt, nach der ersten oder zweiten Methode, so multipliziere die gezogene Wurzel mit der Summe der gezogenen und der sich ergebenden, dies Produkt wiederum mit dem dreifachen der sich ergebenden Wurzel und addiere zu dem Resultat den Kubus der [sich ergebenden] Wurzel. Die Summe subtrahiere von dem ersten Rest. Bleibt dir etwas als Differenz, so füge 1 zu der bereits gefundenen Wurzel und zwar in der nachfolgenden Ordnung hinzu, multipliziere das Resultat mit der gefundenen Wurzel und mit dem dreifachen dessen, was du hinzugefügt hast, d. h. mit 3×1, und addiere zu dem Produkt den Kubus der hinzugefügten Zahl. Ist das Ergebnis nicht größer als der letzte Rest, so subtrahiere es von ihm und schreibe 1 hinter die gezogene Wurzel. Ist es größer als der Rest, so ist das für dich ein Beweis, daß in der Wurzel keine Einer dieser Ordnung enthalten sind. Versuche es dann mit 1 aus der nächsten, also dritten Ordnung der gezogenen Wurzel; ich meine addiere die 1 [der genannten Ordnung] zu der gefundenen Wurzel und multipliziere das Resultat mit dem dreifachen der hinzugefügten Zahl. Durch das Produkt dividiere deinen Rest, nur daß dir der Kubus des sich ergebenden Quotienten übrig bleibt und jener Rest in dem obenerwähtnen Verhältnis zu dem neuen Rest steht. In diesem Falle wird aber auch eine kleine Zahl im Rest genügen.

Der Quotient ist die sich ergebende Wurzel, schreibe sie in die Wurzelreihe in die genannte Ordnung; multipliziere dann die bereits gefundene Wurzel mit der Summe der gefundenen und der sich ergebenden, ferner mit dem Dreifachen der sich ergebenden Wurzel und addiere zu dem Produkt den Kubus der sich ergebenden Wurzel. Das Ganze subtrahiere von dem Rest, den du erhalten hattest. So kannst du mit voller Genauigkeit verfahren, bis du zu der verlangten Kubikwurzel oder zu einem Näherungswerte gelangt bist[57]..

Die sechste Pforte[58]. Von den Proportionen d. h. der gegenseitigen Vergleichung der Zahlen. Du weißt schon, daß, wenn 4 Zahlen in Proportion stehen, das Produkt der ersten und vierten gleich dem der zweiten und dritten Zahl ist. Sind uns nun irgendwelche Zahlen gegeben und außerdem eine bestimmte andere Zahl, die einer gewissen unter den ersteren entsprechen soll, so können wir dir zeigen, wie du alle entsprechenden Zahlen finden kannst, die zu einander in demselben Verhältnis stehen wie die gegebenen. Wenn wir nämlich eine von diesen mit der gegebenen anderen multiplizieren und durch die dieser entsprechende dividieren, so kommt die der multiplizierten korrespondierende Zahl heraus. Z. B. Sind a, b, c, d, e die geg. Zahlen, und soll eine Zahl g der Zahl d entsprechen. Wollen wir nun die a, b, c, d, e entsprechenden Zahlen finden, so multiplizieren wir a mit g und dividieren durch d; es komme k heraus. Also wird: $a . g = k . d$ oder $a : d = k : g$ oder bei Vertauschung der inneren Glieder $a : k = d : g$. Ebenso ist $i = \frac{b . g}{d}$ die zu b korrespondierende Zahl, ferner $h = \frac{c . g}{d}$ die zu c, $f = \frac{e . g}{d}$ die zu e entsprechende Zahl. Also haben wir in k, i, h, g, f die zu a, b, c, d, e entsprechenden Zahlen, denn offenbar stehen die Zahlen k, i, h, g, f im gleichen Verhältnis zu einander wie a, b, c, d, e, w. z. b. w.

Ferner: selbst wenn uns keine der entsprechenden Zahlen selbst bekannt ist, wohl aber die Summe von 2 oder 3 von ihnen, so können wir die entsprechenden Zahlen daraus ableiten. Z. B. Ist im obigen Falle die Summe $k + g + f$ uns bekannt, sie sei gleich m, und wir wollen daraus die zu a, b, c, d, e entsprechenden Zahlen ableiten. Setzen wir die Summe der k, g, f entsprechenden Zahlen, $a + d + e = n$, und gemäß $m : n$ bestimmen wir das Verhältnis jeder der Zahlen a, b, c, d, e zu der ihr entsprechenden — indem wir dazu $k = \frac{m . a}{n}$, $i = \frac{b . m}{n}$ . . . wie oben bilden — so behaupten wir, daß die so gefundenen Zahlen k, i, h, g, f die verlangten sind. Beweis:

$$\frac{n}{m} = \frac{a}{k} = \frac{e}{f} = \frac{d}{g}$$

Summieren wir, so wird:

$$\frac{n}{m} = \frac{a+d+e}{k+g+f} \text{ oder } \frac{n}{a+d+e} = \frac{m}{k+g+f}$$

aber $n = a+d+e$, also $m = k+g+f$, also haben wir wirklich die a, b, c, d, e entsprechenden Zahlen gefunden und zwar k, i, h, g, f und von ihnen ergeben k, g und f die Summe m.

Wir fügen einige Aufgaben hinzu.

Aufgabe. Die Summe einer ersten und zweiten Zahl steht zu einer dritten Zahl in einem gegebenen Verhältnis; die Summe der ersten und dritten zur zweiten in einem anderen, ebenfalls bekannten Verhältnis; und eine der drei Zahlen ist bestimmt. Wie groß ist jede von den übrigen?

Da du bereits das Verhältnis einer der entsprechenden Zahlen zu der anderen kennst, so kannst du daraus die entsprechenden für die übrigen ableiten und erhältst das Verlangte.

(Es soll also aus

$$\frac{x+y}{z} = p; \quad \frac{x+z}{y} = p' \text{ und } y = q \quad x \text{ und } z$$

bestimmt werden. Gewählt ist im Texte das Beispiel:

$$p = 3 + \frac{2}{5} + \frac{1}{7}; \; p' = 7 + \frac{2}{3} + \frac{1}{4}, \; q = 30.$$

„Wir suchen zuerst 3 Zahlen zu ermitteln, die sich so verhalten, wie es im ersten Buche dargelegt wurde; d. h. subtrahiere 1 von dem Produkt $(3+25+17)(7+23+14)$ und das ist die erste Zahl“, aus der wir die Lösung ableiten können. Eine zweite Zahl ergibt sich als $1+p$, eine dritte als $1+p'$. Die drei Zahlen $p.p'—1$, $1+p$, $1+p'$ heißen „ursprüngliche Zahlen“. Aus ihnen ergeben sich die gesuchten als

„abgeleitete". Indem nämlich $y = q$ werden sollte, wird

$$\frac{q}{1+p} = \frac{x}{pp'-1} = \frac{z}{1+p^1}$$

oder in unserem Beispiele:

$$x = 178 + \frac{98}{159}$$

$$y = 30$$

$$z = 58 + \frac{281}{318}.)$$

Dir ist bereits gezeigt worden, daß wenn du die Summe von zwei dieser abgeleiteten Zahlen kennst, wie du alsdann alle Zahlen einzeln finden kannst, die den ersten bekannten entsprechen. Ebenso wenn du den Überschuß von einer der abgeleiteten oder von der Summe zweier abgeleiteter über eine andre oder zwei abgeleitete kennst, und welche anderen Fälle es geben mag, in denen man die Kenntnis der abgeleiteten Zahlen einzeln gewinnen kann. Nachdem du also die entsprechenden Zahlen kennst, wie immer du zu ihrer Auffindung gekommen sein magst, so wollen wir dir jetzt beweisen, daß diese entsprechenden Zahlen die verlangten sind. Denn die erste ursprüngliche verhält sich zu der zweiten wie die erste abgeleitete zu der zweiten; ebenso verhält sich die zweite ursprüngliche zu der dritten wie die erste abgeleitete zu der dritten, also als Quotient zweier gleichen Verhältnisse wird das erste ursprüngliche sich zu dem dritten verhalten, wie die erste abgeleitete zu der dritten. Addiert man, so verhält sich die Summe der ersten und zweiten ursprünglichen zu der dritten wie die Summe der ersten und zweiten abgeleiteten zu der dritten. [Die erste Summe verhält sich aber zu der dritten ursprünglichen so wie das zweite in der Aufgabe gegebene Verhältnis, also ist unsre Behauptung bewiesen.]

(Der Text bringt noch ein zweites Beispiel:

$$p=\frac{3}{5}+\frac{1}{6}; \quad p'=2\frac{1}{3}, \quad x=20.$$

$$pp'-1=\frac{2}{5}+\frac{1}{3}+\frac{1}{3\cdot 6};$$

$$\text{also } y=44\frac{56}{71}; \quad z=84\frac{36}{71})$$

Es ist dir nützlich, wenn du weißt, daß wenn das Produkt aus dem Verhältnis der Summe der ersten und zweiten Zahl zu der dritten in das Verhältnis der Summe der ersten und dritten Zahl zur zweiten nicht größer als 1 ausfällt, daß dann der Fragesteller sich geirrt haben muß.[59] Zum Verständnis dessen schicken wir folgendes voraus. Für je 2 gegebene Zahlen ist das Produkt aus dem Verhältnis der ersten zu der zweiten in das der zweiten zur ersten gleich 1.

(Beweis. Seien a und b die beiden Zahlen; dann ist entweder b ein Vielfaches von a;

$$b = c.a, \text{ wo } c \text{ eine ganze Zahl ist,}$$

oder ein Vielfaches von b ist ein Vielfaches von a,

$$b=\frac{m}{n}a.$$

Im ersten Fall ist $\frac{b}{a}=c$, $\frac{a}{b}=\frac{1}{c}$, also $\frac{b}{a}\cdot\frac{a}{b}=1$.

Im zweiten Fall ist, $\frac{b}{m}=b^1$ gesetzt, $\frac{b^1}{a}=\frac{1}{n}$, $\frac{a}{b^1}=n$

$$\frac{b^1}{a}\cdot\frac{a}{b^1}=\frac{mb}{a}\cdot\frac{n\,a}{m\cdot b}=1.)$$

Ist dies bewiesen, so wird dir jetzt klar werden, daß das Produkt aus der Summe der ersten und zweiten Zahl dividiert durch die dritte in die Summe der ersten und dritten Zahl dividiert durch die zweite größer als 1 sein muß, denn das Verhältnis der ersten und dritten zur zweiten ist viel größer als das der dritten zu der Summe der ersten und zweiten. Aber das Produkt des Verhältnisses der ersten und dritten zur dritten und des Verhältnisses der dritten zur zweiten und ersten ist gleich 1; also ist das Produkt aus dem Verhältnis der Summe der ersten und zweiten zur dritten in das Verhältnis der Summe der ersten und dritten zur zweiten größer als 1.

Aufgabe. Das Verhältnis der zweiten Zahl zu dem Rest der dritten, von der die erste subtrahiert wurde, sei gegeben; ferner verhalte sich die dritte zu dem Rest der zweiten, von der die erste subtrahiert wurde, wie eine gegebene andere Zahl. [Und die erste Zahl sei bekannt.] Wie groß ist jede von den Zahlen mit den genannten Eigenschaften?

Da mußt du 3 Zahlen zu ermitteln suchen, die sich genau so verhalten, wie die 3 Zahlen der vorigen Aufgabe nur mit den Verhältnissen, die hier genannt wurden. Und zwar bleibt die erste Zahl dieselbe wie hier, die neue zweite ist jetzt gleich der Summe aus der ersten und zweiten, während die erste und dritte zusammen die neue dritte Zahl ergeben.

(Beispiel: Aus $yz—x=3^1/_3$; $zy—x=6$, $x=19$ y und z zu bestimmen.

Ermittelt man jetzt 3 Zahlen, daß
$x'+y'z'=3^1/_3$ $x'+z'y'=6$, so findet man
$x'=19$, $y'=4^1/_3$, $z'=7$; dann ist
$x=19$, $y=y'+x'=23^1/_3$, $z=z'+x=26$.).

Dies alles ist in dem Vorausgehenden begründet. Auch diesmal kannst du durch dieselbe Methode wie früher [einzelne von den Zahlen] ermitteln, d. h. ist dir eine von den Zahlen bekannt, so kannst du die anderen finden, indem du Zahlen gleicher Eigenschaft, die den Unbekannten entsprechen, ausfindig machst, und was sich sonst in bezug auf ihre Ermittelung aus Bekannten, aus dem ihre Kenntnis sich gewinnen läßt, ergeben hat.

Aufgabe. Addiert man die erste Zahl zu der zweiten, so verhält sich die Summe zu der Differenz der ersten und dritten wie eine gegebene Zahl; die Summe der ersten und dritten verhält sich zu der Differenz der zweiten und ersten wie eine gegebene andre Zahl; [und die erste ist bekannt]. Wie groß ist jede von den Zahlen dieser Eigenschaft?

Da mußt du für diese gegebenen Verhältniswerte drei Zahlen nach dem früheren Verfahren zu ermitteln suchen; die Hälfte der ersten Zahl, das ist die neue erste Zahl; die zweite zu dieser ersten, d. h. zur halben früheren ersten addiert, ergibt die neue zweite, endlich die Summe der dritten und dieser ersten ist die neue dritte Zahl.

(Beispiel: Aus

$$\frac{x+y}{z-x} = 4\tfrac{1}{2}; \quad \frac{x+z}{y-x} = 5, \quad x = 10\tfrac{3}{4}$$

sollen y und z ermittelt werden.

Da die Gleichungen:

$$\frac{x'+y'}{z'} = 4\tfrac{1}{2}, \quad \frac{x'+z'}{y'} = 5, \quad x' = 21\tfrac{1}{2}$$

in die obigen durch die Substitutionen

$$x' = 2x \text{ oder } x = \frac{x'}{2}$$

$$y' = y - x \text{ oder } y = y' + x$$

$$z' = z - x \text{ oder } z = y' + x$$

übergehn, so findet man:

$$x^1 = 21\tfrac{1}{2}, \quad y' = 5\tfrac{1}{2}, \quad z' = 6$$

$$x = 10\tfrac{3}{4}, \quad y = 16\tfrac{3}{4}, \quad z = 16\tfrac{3}{4}.$$

Auch diesmal kann man, da eine Zahl bekannt ist, aus dem Tripel der entsprechenden die beiden andren finden.)

Nachschrift des Verfassers. Beendet ist die sechste Pforte dieses Buches, und mit deren Beendigung ist auch das ganze Buch beendet. Sei Gott dafür Lob, Er allein sei gepriesen und verherrlicht. Die Vollendung dieser Arbeit fiel auf den Anfang Nisan des Jahres 6081, als ich in das 33. Lebensjahr eintrat[60].

NOTEN

zu

MAASE-CHOSCHEB.

Das erste Buch.

[1]) Die Abhandlungen der lauteren Brüder rechnen die Arithmetik zu den propädeutischen Disziplinen der Philosophie, da die Lehre von der Zahl die Grundlage ihres ganzen philosphischen Systems ausmacht. (Dietrici: Propäd. der alten Araber. S. 1 u. 2.) Lewi, der sich von vielen dieser Spekulationen frei gemacht hat, läßt die Arithmetik nur als „praktische Tätigkeit“, d. h. als eine technische, für die Bedürfnisse des praktischen Lebens geschaffene Wissenschaft gelten. Jedoch findet auch diese Ansicht Lewis sich in dem genannten philosophischen Werke ausgesprochen, indem das Rechnen zu den „zum Lebensunterhalt notwendigen Künsten“ gerechnet wird. (Dieterici: Philosophie der Araber im X. Jahrh. II. S. 124.)

[2]) Der Ausdruck סבה des Textes bedeutet eigentlich nur physikaliche Ursache. Leo überträgt ihn auch auf den logischen Grund, (obwohl er ihn im liber bellorum auch häufig in Wendungen wie סבה פועלת = wirkende Ursache oder דברים מסובבים = etwas durch Ursachen bedingtes im ursprünglichen Sinne gebraucht.) Eine „vielfache Wurzel des Satzes vom Grunde“ kennt er nicht. So sagt er bei der Besprechung der Spaltung des Jordan in Josua Kap. 3, 16 f. f. “Es kann nicht vorgestellt werden

bei der Schöpfung irgend eines Dinges, daß sein Sein die Bedingungen seines Seins aufhebe. Das wäre so, als wolltest du ein Quadrat zeichnen, dessen Diagonale gleich seiner Seite ist, oder ein gradliniges Dreieck konstruieren, dessen Winkel mehr oder weniger als 2 Rechte betragen, oder kaltes Feuer machen oder sonst etwas, dessen Sein sich selbst negiert. Da es nun in der Natur des Wassers liegt, so lange es wirklich Wasser — und nicht etwa Wasserdampf — ist, dass es nach dem niedrigsten Punkte hinstrebt, so müsste man annehmen, daß das Wunder in einer Weise geschieht, wie es von Gott nicht angenommen werden kann, ..."

3) Es ist dies, wie sofort auffällt, derselbe Gedanke, dem Schiller im Anfang der „Glocke" so berühmten Ausdruck gegeben hat.

5) Auch der zweite Grund, den Leo für die Berechtigung seines Vorhabens anführt, zeigt deutlich, daß er für das Wesen mathematischer Forschung Verständnis hat. Die Allgemeinheit, der umfassende Geltungsbereich mathematischer Sätze, die, wenn auch für spezielle Probleme und Anwendungen gesucht und gefunden, doch immer über den Einzelfall hinausführen und unendlich viele ähnliche Fälle mit in sich begreifen, ist von ihm klar erfaßt und ausgesprochen. Allerdings vermag Leo selbst grade in diesem Werke sehr häufig nicht zu erkennen, daß viele Sätze, die er als Sondererkenntnisse aufführt, unter einen Ausdruck gebracht werden können.

6) Alle Codices, auch der in der Hofbibliothek zu Wien (s, Katalog der hebr. Hschr. von Krafft & Deutsch, II. T. S. 60.) haben auffälligerweise statt ספר = Buch das Wort ספור = Erzählung. Sollte das auf ספר = zählen und מספר = Zahl anspielen?

[7]) Im Text לפי קצורנ, eine Phrase, die Lewi oft verwendet. (So zu Genesis I. 14). Diese Phrase fehlt in Zunz: hebräische Redeweisen für bescheidene Meinungsäußerung. (Zeitschr. deutsch-morgenl. Ges. 1871. B. 25).

[8]) Wörtlich übersetzt: die Weisen für jede Art von den Arten der Zahlen. Auf diesen Ausdrücken (לכל מין ומין ממיני המספר) mag der Irrtum Schapiras beruhen, der den Maasse-Choscheb als ein zahlentheoretisches Werk anspricht. (Zeitschr. für Mathem. 1880. Suppl. hist. lit. Abt, S. 7). Aber nur Satz 15 u. 16 sind zahlentheoretischen Inhalts.

[9]) Das Verbum חשב bedeutet im Kal stets denken, im Piel hat es die Bedeutung rechnen. (So Levit. XXV. 27,50, analog. arab. z.B. al-Hasib=der Rechner). Ich glaube daher, daß Leo mit Absicht den Ausdruck מעשה חושב zum Titel gewählt hat, eben wegen der Zweideutigkeit des Verbalbegriffs. Denn sein Werk sollte ja im Gegensatz zu früheren der Überlegung und der Ergründung algebraischer Gesetzmäßigkeiten gewidmet sein; es sollte ein Werk des Denkers und Rechners zugleich sein. Dahin ist also die Deutung Steinschneiders (Bibl. mathem. 1897. S. 1084) zu ergänzen. Eine interessante Bestätigung dieser Auffassung bietet mir ein von Mose Serah Eidlitz zu Prag 1775 verfaßtes Lehrbuch der Arithmetik, das den ähnlichen Titel ספר מלאכת מחשבת führt. Dort heißt es in der Einleitung: „Ich nannte dieses Werk מלאכת מח', weil es eine Fertigkeit (מלאכה) und keine Wissenschaft (חכמה) lehrt, und weil das Wort מחשבת vom חשב sowohl das Rechnen (לשון חשבון) als das Denken (לשון מחשבה) als auch die Vornehmheit (לשון חשיבות) unseres Unternehmens ausdrückt.“ Die Übersetzung: „Meisterstück“, die

sich im Cod. 36 auf dem Deckel findet und an Exod. 26,1 anlehnt, ist ganz unpassend.

10) In der Manier der Euklid schickt er diese Wortdefinitionen voraus.

11) Im hebräischen Text מספר מורכב. Eine sehr glückliche Prägung. Ebenso bei Ibn Esra. (Ed. Silberberg) Sefer Hamispar S. 118. הרכב in der Bibel für pfropfen gebraucht. Im Neuhebräischen bedeutet הרכבה auch eine chemische Verbindung. Für obigen Begriff hat Jesod-Olam מספר שטוח, abgeleitet von שטח = Fläche, Produkt.

12) Analog der proportio composita des Mittelalters. (Siehe z. B. bei Leonardo v. Pisa. Cantor B. II, S. 17.)

13) Im Text heißt es: מצד הנושא, ganz wortgetreu übersetzt also: vom Gesichtspunkt des Trägers. Ich habe den Ausdruck als „Dimension“ gedeutet.

14) Über die Einheit vergl. den Anfang des zweiten Buches.

15) Hebräisch ראשון, was bei Leo sowohl prim als relativ prim bedeutet, genau wie bei Euklid (Ed. Heiberg S. 187), wo erst durch den Zusatz „zu einer Zahl“ (hebr. אצל) der letztere Begriff vom ersteren sich unterscheidet.. (Vergl. Cantor I, S. 267).

16) Dieser ganze Satz ist eine Umkehrung von Satz 26 des VII. Buches der Elemente.

17) Der Ausdruck מנה zählen, als Faktor in sich enthalten, in dem die Entstehung der Multiplikation aus der Addition noch deutlich durchschimmert, ist dem Euklid nachgebildet; z. B. (Ed. Heiberg, S. 184) numerus numerum secundum aliq. numerum metitur.

Man kann daher im Zweifel sein, ob im hebräischen Texte בשיעור אחרי א׳ (mit ר, also secundum) oder בשיעור אחדי mit ד, im Sinne von: nach Maßgabe der in a enthaltenen Einheiten) zu lesen ist. Ich hatte mich nach Cod. 68 für das erste entschieden, sah aber dann, daß Cod. 36. אחדי liest, Diese Lesart entspricht denn Satz 15 des 6. Buches: Numerus numerum multiplicare dicitur, ubi quot in eo sunt unitates, toties componitur numerus multiplicatus. Dies ist die brauchbarste Definition des Multiplizierens: $c = a.\,b$ heißt: c entsteht aus a, wie b aus der Einheit.

18) Vergl. Biographie S. 54.

19) Im Text heißt es נמשכים בדרך המספר, also genau: folgend in der Weise der Zahl, ein auf Euklid und dem Satze vom Flächeninhalt des Rechtecks basierter Ausdruck. Interessant ist, daß L. im Beginn des Buches zwar das Assoziations- und Distributions-Gesetz der Multiplikation sich herzuleiten bemüht, das kommutative jedoch aus der Geometrie als selbstverständlich übernimmt.

20) $a\,b + a = (a+1)\,b.$

21) $a<b<c$

$a\,(c-b) + c\,(b+a) = b\,(c-a).$

22) Alle diese Relationen werden für die Lösungen der folgenden Aufgaben benötigt.

23) Diese Aufgabe identisch mit Aufgabe 27 des I. Buches von Diophant. (S. Wertheim: Diophant, Leipzig S. 32).

24) Die Ausrechnung geschieht in folgender Weise:

$$a<b<c;$$

wir setzen:

$$b - a = d$$
$$c - b = e$$
$$c - 1 = f$$
$$b - 1 = h$$
$$a - 1 = 1, \text{ da } a = 2$$

also:

$$i = c + d$$
$$k = i + 2 \cdot d \cdot f$$
$$l = k + 2 \cdot c \cdot (a - 1) = k + 2\,c.$$

denn:

$$\tfrac{1}{2}\,(k + l) = i + 2 \cdot d \cdot f + e$$
$$= c + d + 2 \cdot d \cdot f + e$$

also nach § 49

$$= 2 \cdot f \cdot h,$$

setzen wir also $2\,f\,h = m$,

so wird:

$$\frac{k+l}{2} = \frac{k+l}{a} = m,$$

ferner:

$$\frac{i+k}{2} = d \cdot f + c + d + e$$
$$= d \cdot f + a \cdot f$$
$$= b \cdot f$$

setzen wir daher

$$2\,f = n,$$

so wird

$$\frac{i+k}{b} = 2\,f = n.$$

drittens:

$$\frac{i+l}{2} = d \cdot f + (d + c)$$
$$= (f + 1)\,d + c \qquad [§ 44.]$$
$$= (d + 1)\,c$$
$$= h \cdot c, \quad \text{da } a = 2,$$

für

$$2\,h = o,$$

wird also

$$\frac{i+l}{c} = 2\,h = o;$$

jetzt ist

$$m+i = n+k = o+l,$$

denn

$$\begin{aligned} m+i &= 2 \cdot f \cdot h+i \\ n+k &= 2\,f+2\,d \cdot f+i \\ &= 2\,f\,h+i \\ o+l &= 2\,h+2\,d \cdot f+2\,e+i \\ &= 2\,(h+e) + 2\,d \cdot f+i \\ &= 2 \cdot f+2\,d \cdot f+i \\ &= 2\,f\,h+i. \end{aligned}$$

In Wirklichkeit fällt die Rechnung noch viel unübersichtlicher aus, da alle diese Gleichungen in Worten dargestellt werden.

[25]) Im Codex 68.

[26]) zu S. 29. Diese Lösungen ergaben sich,

$$p = \frac{1}{a} \quad q = \frac{1}{b} \quad r = \frac{1}{c}$$

gesetzt, ohne weiteres aus den Gleichungen

$$\begin{aligned} x+p\,(y+z) &= y+q\,(z+x) \\ &= z+r\,(x+y). \end{aligned}$$

Z. B. wird bei Elination von z

$$x\left\{1+9\,(r-2) - p\,(r-q)\right\} = y\left\{p\,(r-2) - 9\,(r-p) + 1\right\}$$

führt man für p, q, r ihre Werte ein und erweitert beiderseits mit a · b · c, so wird

$$x \cdot n = y \cdot m,$$

wo m und n die von Leo angegebenen Lösungen sind.

Bemerkt sei, daß Leonardo von Pisa dieselbe Aufgabe einer unbestimmten Gleichung des ersten Grades für 5 Zahlen in folgender Einkleidung originell behandelt: 5 Personen wollen ein Schiff kaufen. Jede könnte den Preis des Schiffes zahlen, wenn ihr die übrigen 4 je einen bestimmten Teil ihres Geldes geben würden. (Cantor II, S. 22.)

[27]) Auch diese Probe wird sehr umständlich auf 3 Fol. durchgeführt.

[28]) Daß L. es für notwendig erachtet, diese Vorbemerkung (הקדמה) vorauszuschicken, zeigt, daß es sich im folgenden um neue, der Leserwelt noch fremde Begriffe handelt.

[29]) Hebräisch נושאים, eig. „Träger".

[30]) L. braucht für kombinieren dasselbe Verb חבר (wörtlich verbinden, vereinigen) wie für addieren; um Verwechselungen vorzubeugen, leitet er davon ein neues Nomen מחברת (für Kombination) ab, im Gegnnsatz zu נחבר = Summe. Unbestimmt bleibt allerdings der Gebrauch von חבור, das bald Summe, bald Kombination bedeutet.

[31]) Genau heißt es im Text: מחברות המתחלפות בסדר לבד, Kombinationen, die sich nur in der Reihenfolge der Elemente unterscheiden. Dafür wurde kurz Permutationen geschrieben.

[32]) So wird der fehlende Terminus eines Produktes aus mehreren Faktoren umschrieben.

[33]) Im modernen Sprachgebrauch als Variationen zu bezeichnen.

[34]) Bezeichnet man die Variationen von e Elementen zur p^{ten} Klasse mit Vp(n), so gilt

$$V_{p+1}(n), = (n-p)\ V_p\ (n)$$

Wie schwerfällig klingt dieser Satz in Worte gefaßt!

[35]) Also die Kombinationen im engeren Sinn.

[36]) 2. Stelle P(n) die Permutationen von n Elementen, $K_p(n)$ ihre Kombinationen zur p^{ten} Klasse dar, so gilt: $K_p(n) \cdot P(p) = Vp(n)$, (wo Vp(n) die Bedeutung von Note 34 hat.)

[37]) In der früheren Bezeichnungsweise lautet dieser Satz:

$$K_p(n) = K_{n-p}(n)$$

Das zweite Buch.

---

1) d. h. die Philosophen; gemeint sind wahrscheinlich die lauteren Brüder.

2) Es ist unmöglich, an dieser Stelle alle Belege und Parallelen, die sich sowohl in genannter Philosophie wie bei Ibn Esra für diesen Vergleich finden, aufzuführen. (Die Analogie zwischen der Eins und dem Schöpfer ist speziell durchgeführt bei Dieterici, Philos. der Araber II, S. 168),
Eine Spezialarbeit: die Zahlensymbolik des Abraham Ibn Esra von Dr M. Olitzki (Berlin, 1890. Jubelschrift für Dr J. Hildesheimer) trägt das gesamte hierhergehörige Material zusammen.

3) Hebräisch: ואם הוא מקרה. Ich habe das ואם als negative Schwurpartikel genommen.

4) Vergl. Dieterici: Propädentik S. 3. Ibn Esra Com. zu Exod. 3, 15.

5) Wörtlich so bei Ibn Esra, (Sefer Haechad 5 und Sefer Jesod Mispar Ed. Piusker S. 5.) nur statt des Wortes סבה (für Ursache) braucht Leo das in der Kabalah häufig angewandte עלה.

6) Vergl. Ibn Esra Sefer Hamispar S. 11, „Eins ist Anlaß jeder Vermehrung u. s. f.“

[7]) Denn die Ursache ist der Wirkung nicht gleich. Plotin VI. 9. 6 (Olitzki l. c. S. 114.)

[8]) Die Teilung der Eins ist die Klippe, an der jedesmal die Betrachtungen über den bevorzugten Charakter der Eins scheitern. Alle müssen zugeben, daß wenn 1 keine Zahl ist, sie nicht gebrochen werden dürfte. Ibn Esra (l. c. S. 31) sagt darüber: „Es ist bekannt, daß 1 gleichsam der Mittelpunkt in einem Kreise ist; darum kann sie nicht gebrochen werden. Nur weil die Gesamtheit mit dem Namen der 1 benannt wird, wie ein Bild, das den gesamten Körper darstellt, während der Körper aus Flächen zusammengesetzt ist — siehe im folgenden den Protest Leos gegen diese Behauptung — deshalb kann der Mensch aus der 1 in Gedanken (!) Brüche und Doppelbrüche bilden.“ Man entschließt sich daher meist, der Eins einen Doppelsinn beizulegen: 1 im eigentlichen Sinn hat keine Teile, wohl aber im metaphorischen Sinne als eine Summe. (Ibn Esra l. c. S, 32: „1 ist מפאה אחת von einer Seite keine Zahl, andererseits gleicht sie einer Zahl und zwar einer ungraden.“ Siehe ferner Diet. Philos. d. A. II S. 127.) In ähnlicher Weise sucht auch Leo einen Ausweg (Buch 1, § 1 Ende). Vielleicht sind auch hier die Worte: „und dann ist sie nicht 1” nur in dem Sinne zu fassen: dann ist sie nur in übertragener Bedeutung 1”.

[9]) z. B. die Zahl 8, die 8 Einer aneinandergereiht darstellt, hat im ersten und letzten Einer ihre Begrenzung; nicht so die 1; denn die Begrenzungen der 8 sind ihr gleichartig; wird aber die Strecke 1 durch 2 Punkte begrenzt, so sind diese eben etwas ganz Andersartiges als Strecken.

[10]) Gegen Ibn Esra (S. Note 7). Der Gegensatz von Punkt- und Linienelement, Linie und Flächenelement,

der in der Philosophie häufig unbeachtet blieb, der beispielsweise den Trugschlüssen Zenos zum Grunde liegt, ist hier deutlich herausgefühlt. Die Verwechslung beider Begriffe lag deshalb so nahe, weil durch Bewegung des Punktes die Linie entstanden gedacht werden kann. Daher der Satz: „Die Wurzel der sinnlichen Linie ist der Punkt, der in der Geometrie die 1 der Arithmetik vertritt." (Dieterici l. c. S. 131 und Propäd. S. 24).

[11]) Biblische Wendung. (Gen. III 19.) S. Überweg-Heinze: Gesch. der Philosophie II S. 230: „Wie die Zahlen sich aus der Eins, welche zwar Prinzip aller Zahlen, aber selbst noch keine Zahl ist, zur Vielheit entwickeln, so gelangt auch das All zur Mannigfaltigkeit der Dinge aus der Einheit, kehrt aber zu dieser aus jener zurück." (Vergl. Dieterici l. c. I. Einl. u. Makrokosmus S. 141.)

[12]) Hebr. מעלה = Stufe, Grad. (Vergl. das arab. Analogon bei Dieterici Propäd. S. 179).

[13]) Vergl. Dieterici l. c. S. 6 u. 13. „Eigentümlichkeit der Zahl ist ihr Fähigkeit, Vervielfältigung und Hinzufügung anzunehmen.

[14]) Wörtlich dieselbe Betrachtung in Leos Euklidkommentar betreffs der Verlängerung der graden Linie. S. 74 und 75.

[15]) Sie ist eine contradictio in adjecto.

[16]) Vergl. Note 3 zu S. 5.

[17]) Die dahingehörige 1. Denn es gibt verschiedene „Grade", die je nach der Untersuchung besonders definiert werden,

bald als $\frac{1}{360}$ des Kreises,

bald als $\frac{1}{30}$ des Tierkreiszeichens,

bald als $\frac{1}{120}$ des Durchmessers etc.

[18]) Vergl. Dieterici Philosophie der Araber II. S. 127: „Rechnung ist Vereinigung von Zahlen und ihre Trennung."

[19]) Über die Deutung dieser Worte bin ich im Zweifel Sollten sie weiter nichts besagen, als: entweder ist eine Zahl durch Vereinigung resp. Trennung zu beachten oder sie ist bekannt?

[20]) Wie bei der Multiplikation.

[21]) In dieser Systematik der algebraischen Operationen spielt merkwürdigerweise auch die Bezeichnung derselben eine Rolle. Da nämlich die Kombinationen mit dem gleichen Ausdruck gekennzeichnet sind wie die Summen und zwar als חבורים = Vereinigungen, so treten beide konditioniert auf.

[22]) Die gemeine Addition.

[23]) Größe bedeutet hier Anzahl der Elemente (hebr. כמות, vielleicht schon im ersten Falle so zu deuten). Gemeint sind hier Kombinationen und Variationen.

[24]) sc. Permutationen.

[25]) sc. Die addiert werden sollen.

[26]) שיעור רמוז אליו wörtlich eine Größe, auf die hingedeutet ist (von רמז = Andeutung).

[27]) Diese Zusammenfassung der inversen Operationen unter den Begriff der Verringerung, ferner die Charakteristik des Radizierens als Unterfall des Dividierens dürfte originell sein.

[28]) Der Quotient wird durch direkte Division gefunden. Bei der Proportionsrechnung erst durch die Kombination von Multiplikation und Division.

[29]) Vergl. Note 2 zu S. 16. Man erkennt jedoch, wie weit L. über Ibn Esra hinausgeht.

[30]) Das, was diese Pforte zu dem im ersten Buche behandelten hinzufügt, ist nur: die Darstellung der Sätze durch bestimmte Zahlenbeispiele, die hier weggelassen werden durften.

[31]) Hebräisch מספר שטוח, nur an dieser Stelle in prägnantem Sinne gebraucht. Derselbe Ausdruck in modifizierter Bedeutung in Jesod Olam v. Isaak Israeli, siehe Note 11 von Buch 1.

[32]) biblische Wendung. Vergl. Ezechiel 37, 17.

[33]) Hier eine Partie, die in fast wörtlicher Übereinstimmung mit Ibn Esra l. c. S. 13 abgefasst ist.

[34]) Nach der Darstellung (auf S. 62) sollte man eigentlich etwa folgendes Schema erwarten:

	angenähert	
obere Reihe	98	987654321
mittlere Reihe	1	1
untere Reihe	95	9437
obere Reihe	439	43954321
mittlere Reihe	4	4
untere Reihe	95	37748
obere Reihe	620	6206321
mittlere Reihe	6	6
untere Reihe	95	56622
obere Reihe	544	544121
mittlere Reihe	5	5
untere Reihe	95	47185
obere Reihe	722	72271
mittlere Reihe	7	7
untere Reihe	95	66059
„Das ist d. Rest, d. nicht z. Teilung gelangt".		6212

In Anmerkung fügt er hinzu, daß zuweilen keine Erhöhung im Divisor eintreten darf, nämlich dann, wenn die ersten Stellen des Dividendus gleich dem ganzen Divisor oder größer sind, z. B. 9437:943.

34a) Leo rekurriert immer auf die Anwendungen der Arithmetik für die Astronomie, was bei deren Stellung innerhalb des arab. Geisteslebens nicht verwundern darf. Daher auch die Bevorzugung der „astronomischen Brüche". Genau dasselbe finden wir in Ibn Esra l. c. S. 26—28, (wo die Addition in astronomischen Tabellen erläutert wird).

34b) Leo unterscheidet regelmäßig zwischen מכה = Multiplikator und מוכה = Multiplikatus. Sollte das damit zusammenhängen, daß Leo zu einer klaren Fassung des kommutativen Multiplikationsgesetzes nicht gekommen ist? (Vergl. Note 19 Buch I.)

35) Im Deutschen fehlt ein anologer Begriff wie das hebräische השמור „das Gemerkte" d. h. die zu merkende Zahl. Ich habe kurz Merkzahl gesagt.

36) Die Zahlen sind von den Copisten häufig ungenau abgeschrieben, besonders Cod. 68 hat viele solche Fehler; statt 45 hat der Text von 68 die Zahl 25, statt 41 in beiden Texten hat das Rechenbild von 36 43, statt 45 hat das Rechenbild von 36 die Zahl 42, endlich stehen die Zahlen häufig in verkehrten Reihen.

37) Der Text für dieses Beispiel lautet so: wir wollen $17^{0}\ 30^{I}\ 40^{II}$ durch $41^{II}\ 52^{III}\ 45^{IV}$ dividieren. Da die letzte Ordnung der unteren (statt „oberen" des Textes) Reihe aus Sekunden besteht, bringen wir alles Davorstehende der oberen Reihe in die Ordnung der Sekunden, das ergibt 63040^{II}, die du als Einer betrachtest. Nun stehen

in der ersten Ordnung der unteren Reihe 41^{II}, die du für Einer zu rechnen hast; was vorangeht, ist nach obigen $\frac{53}{60}$, also ist die Merkzahl $41\frac{53}{60}$. Wir teilen 63040 durch $41\ \frac{53}{60}$, so kommt 1505 heraus, multiplizieren wir 1505 mit der unteren Reihe, so kommt $17^{0}\ 30^{I}\ 28^{II}\ 8^{III}\ 45^{IV}$ heraus. Wir subtrahieren das Resultat von der oberen Reihe, so bleibt $11^{II}\ 51^{III}\ 15^{IV}$. Wir können aber das, was in der ersten Ordnung der oberen Reihe steht, durch die Merkzahl dividieren, deshalb reduzieren wir es auf Terzen und erhalten $711\ \frac{15}{60}$; dividieren wir das durch die Merkzahl, so kommt 15 heraus, das werden Primen sein nach dem oben dargelegten usw.

38) hebräisch "יסוד מספר", also algebraische Wurzel, Zahlenwurzel im Gegensatz zur geometrischen Wurzel, die konstruierbar ist, also existiert; wie man auch vom Euklid annahm, daß „er die Zahleneigenschaft des Irrationalen leugne". (Cantor II S. 438).

39) Dies dürfte der gleiche Gedanke sein, wie der, den Michael Stifel (Cantor l. c.) seiner Theorie des Irrationalen voranstellt, daß nämlich „aus der Multiplikation eines Bruches mit sich selbst niemals eine ganze Zahl werden könne". Leo geht dabei bei seiner Überlegung offenbar ganz vom geometrischen Bilde aus, da es unmöglich ist, etwa 10 einzelne Quadrate von je 1 cm Seitenlänge so nebeneinander zu ordnen, daß ein Quadrat entsteht.

40) Einen einfachen Beweis des Satzes, daß jede m^{te} Wurzel aus einer ganzen Zahl A notwendig

entweder selbst eine ganze Zahl oder irrational sein muß, gibt Dirichlet Vorles. über Zahlentheorie, herausg. von Dedekind, Braunschw. 1894, Absch. I.

[41]) Im Text heißt es: יסודו הוא מדבר בכח לבד wörtlich übersetzt also, seine Wurzel ist „nur potentiell redend". Mit מדבר bezeichnen die mittelalterlich-jüdischen Philosophen die vernunftbegabten, redenden Wesen im Gegensatz zu den Tieren; es bedeutet daher das rhetón und logón zugleich. Das Irrationale heißt nun nicht בלתי מדבר, wie in der Euklidübersetzung des Moses ibn Tibbon (Siehe Cod. hebr. 36, S. 59 u. f.) sondern מדבר בכח in der Möglichkeit rhetón, wenn auch nicht בפעל (= faktisch, aktuell).

[42]) Satz 8 des neunten Buches der Elemente lehrt: „wenn von der Einheit an beliebig viele Zahlen stetig proportioniert sind, so ist die dritte von der Einheit an eine Quadratzahl usf. (vergl. Nesselmann S. 160 und 161.) Dies ist Leos Ausgangspunkt.

[43]) Leo macht hier wie im folgenden einen Unterschied zwischen dem Teil der Wurzel, der bereits „gefunden" ist, und dem, der sich aus der weiteren Rechnung ergibt. Ersterer heißt שרש המוצא, letzterer שרש היוצא. Die erste Zahl der Wurzel, die ebenfalls den zweiten Terminus erhält, wurde in der Übersetzung „Ausgangswurzel" genannt.

[43a]) Im Text heißt es: Siebtel von Siebteln resp. später die Hälfte vom Siebtel. Denn Leo kennt ebensowenig wie alle anderen hebräischen und arabischen Mathematiker Brüche mit einem Nenner größer als 10. Vergl. darüber Silberberg, Ibn Esra Sefer Hamispar S. 104 Anm. 78, ferner Cantor I S. 718 endlich Dieterici (Propäd. der Araber (S. 3 u. S. 6.)

[44]) $(n+1)^2$ ist um $2n+1$ größer als n^2; wäre also nicht n^2, sondern $(n+1)^2$ die angenäherte Wurzel, so wäre 1 das Quadrat der sich bei Division durch 2n „ergebenden" Wurzel.

[45]) Allerdings hat das Bild in 36 ganz andere Zahlen, die weder mit denen im Text gegebenen, noch m. E. mit der Rechnung übereinkommen.

36 bringt folgende Zahlen:		14	4	23	20
	101	41	16		
	3262	40	30		
Radikand.	7654321	40	30		
Wurzel	2766	38	40	7	

Auch die Zahlen von Cod. 68 weichen beträchtlich von denen des Textes ab.

[46]) Vielleicht ein Protest gegen die übertriebene Genauigkeit in der Bruchrechnung. (?)

[47]) An dieser Stelle scheint der hebräische Text korrumpiert. Da diese Partie nur in 36 enthalten ist, so konnte ich keinen andern zum Vergleich heranziehen.

[48]) Der Text hat an den ersten 6 Stellen — von den Quarten bis zu den Nonen — andere Zahlen als die berechneten. Die Zahlen des Textes sind aber offenbar falsch, wie sich auch aus der nachfolgenden Bemerkung des Autors ergiebt.

[49]) Sei $\sqrt{p} = 10^n \cdot \sqrt{\frac{p}{10^{2n}}} = 10^n \sqrt{p^1}$ gesetzt.

Ist nun $\sqrt{p}$ angenähert gleich a,

$\sqrt{p^1}$ angenähert gleich b,

so ist $p = 10^{2n} p^1$,

$$\frac{p}{a^2} = \frac{p^1}{b^2};\ \frac{a^2 - p}{b^2 - p^1} = \frac{p}{p^1} = 10^{2n}$$

[50]) einzufügen: mindestens.

[51]) Im Text heißt es: mit dem dreifachen der 1, die du hinzugefügt hast, d. h. mit 3 von derselben Ordnung wie die 1 der Hinzufügung.

[52]) Es ist $(a + b)^3 = a^3 + 3a^2 b + 3b^2 a + b^3$
$= a^3 + [3a (a + 1)] b + 3a b (b-1) + b^3$

Das Verhältnis der beiden mittleren Summanden ist
$$\frac{3a (a + 1) b}{3a b (b-1)} = \frac{a + 1}{b-1}$$

(Daß Leo die Glieder $3a^2 . b + 3b^2 . a$ in $3a (a+1) . b + 3a b (b-1)$ verwandelt, rechtfertigt sich dadurch, daß, wenn zu dem Nährungswert a überhaupt noch ein ganzzahliger Summand hinzuzufügen ist, dieser mindestens gleich 1 sein, also bei der Division durch $3a (a + 1)$ mindestens 1 als Quotient sich ergeben muß; im Falle $b=1$, ist dann $3a (a + 1) = 3a^2 b + 3b^2 a$. Man hat also bei Division durch $3a (a + 1)$ anstatt durch $3a^2$ eine größere Sicherheit für „die sich ergebende Wurzel".

[53]) d. h. der erste Rest muß verhältnismäßig groß ausfallen.

[54]) Wörtl: es reicht ein Geringes, das übrig bleibt, hier auf den Kubus der sich ergebenden Wurzel zu der gezogenen Wurzel. Soll das letzte heißen: im Verhältnis zu dem Kubus der gezogenen W.?

[55]) d. h. aber in derselben Ordnung folgend; ist z. B. $a=30$, so sieh zu, um wieviel $40^3 > 30^3$ ist.

[56]) Ist a von der Ordnung $(p + 1)$, so setze man $a=a_1 10^p$. Vergleicht man dann $[10^p (a + 1)]^3$ mit

$\left[10^p (a_1 + \frac{b}{10}\right]^3$, so lauten die beiden ersten ausschlaggebenden Glieder des ersten Kubus: $a^3 + 3 . 10^p a^2$, des zweiten Kubus $a^3 + 3 . 10^{p-1} a^2 b$ dividiert man also $3 . 10^p a^2$ durch 10, so ist der Quotient um das b-fache kleiner als das analoge Glied des zweiten Kubus.

[57]) Codex 36, der allein den Abschnitt über die Kubikwurzel enthält, bricht hier plötzlich ab. Es liegt aber nahe zu vermuten, daß hier Beispiele ev. noch weitere methodische Vereinfachungen folgen sollten.

[58]) Das Wenige, was im Texte von der Lehre der Proportionen gegeben ist, ist gewiß nur ein Bruchstück. Denn in den alten Lehrbüchern der Arithmetik ist gerade dieser Lehre ein breiter Raum gewidmet. Siehe z. B. die 6. Pforte von Ibn Esras Zahlenlehre, die nach des Verfassers Meinung „eine sehr wichtige Pforte“ ist.

[59]) d. h. daß die Aufgabe falsch gestellt, unlösbar ist; denn

$$\frac{x+y}{z} \cdot \frac{x+z}{y} = 1 + x \left(\frac{x+y+z}{z\,y}\right) > 1$$

[60]) Es entspricht das Datum des Textes dem Jahre 1321. Diese Schlußbemerkung war der Ausgangspunkt für die Bestimmung des Lebensdaten Levis, De Rossi (vergl. Grätz: Geschichte der Juden B. 7 S. 345) hat hiernach zuerst sein Geburtsjahr auf das Jahr 1288 berechnet.

Im Codex 68 findet sich folgende Nachschrift des Kopisten: „fertig, fertig und zu Ende! Gelobt sei Gott! Der Schreiber möge keinen Schaden nehmen, bis der dem Esel gleichende auf die

Leiter emporsteigt, von der Erzvater Jacob träumte. Heute ist der 29 Tischri 313, was im Zahlenwerte übereinstimmt mit dem des Verses: „Dies ist der Segen, den Mose gesegnet hat.“ Die Kopie stammt mithin aus dem Jahre 1553. (Über die Wendung, „bis der dem Esel gleichende Mensch die Leiter emporsteigt“, siehe Zunz, Zeitschr. Deutsch. morgenl. Ges. B. 25, Jahrg. 1871 S. 649.)

Ende.

Inhaltsverzeichnis.

Druckfehlerverzeichnis.

S. 43,	Zeile 1,	lies Primum statt Prinum.
S. 56,	Zeile 5,	die Note 11a ist ausgefallen; sie enthielt den Nachweis der fraglichen Stellen bei Ibn Esra: Sefer Hamispar S. 24 ff, S. 102 ff.
S. 56,	Zeile 19,	lies המתחלפות statt החתחלפות
S. 58,	Zeile 11,	die grichischen Worte sind am Ende mit Sigma zu schreiben.
S. 101,	Note 6,	lies ניישר statt נשייר.
S. 117,	Note 49,	lies זהו statt פיא.
S. 119,	Note 51,	lies מתנגדיות mit ד in der Mitte.
S. 121,	Note 22,	lies חכמת statt תכמת
S. 142,	Note 4,	lies ערך statt ערד.
S. 143,	Note 31,	lies Einteilung statt Einleitung.
S. 215,	Note 7,	lies קצורנו mit ן am Ende.
S. 225,	Note 16,	Vergl, Note 13 zu Buch I.
S. 227,	Note 29,	Vergl. Note Biographie S. 56.
S. 229,	Note 38,	lies מספרי mit ו. am Ende.

Druck von L. Pinkowitz, Berlin SW. 11, Trebbinerstr. 13.

Figur 1 Prinzip des Jakobstabes

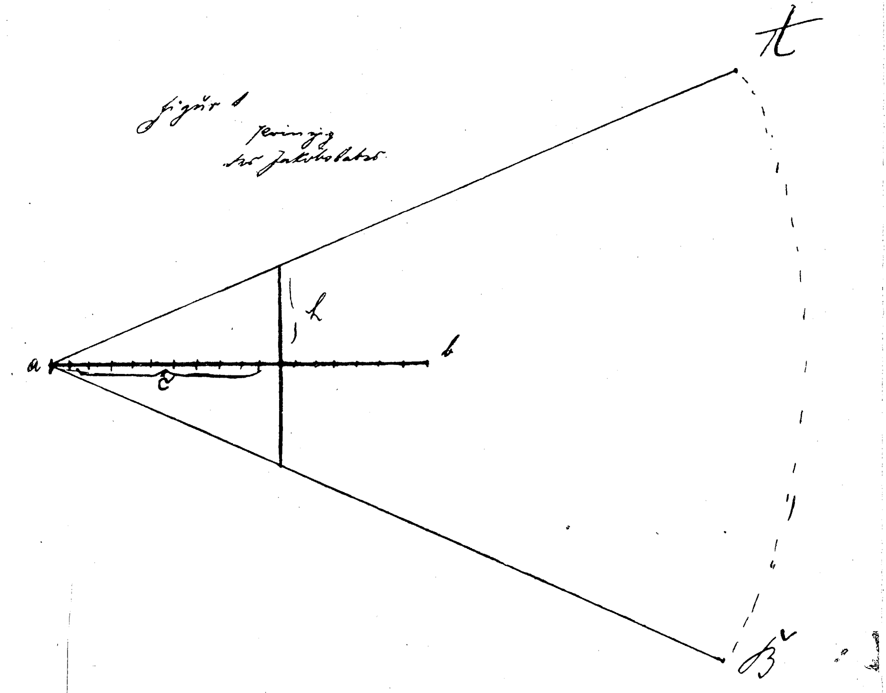
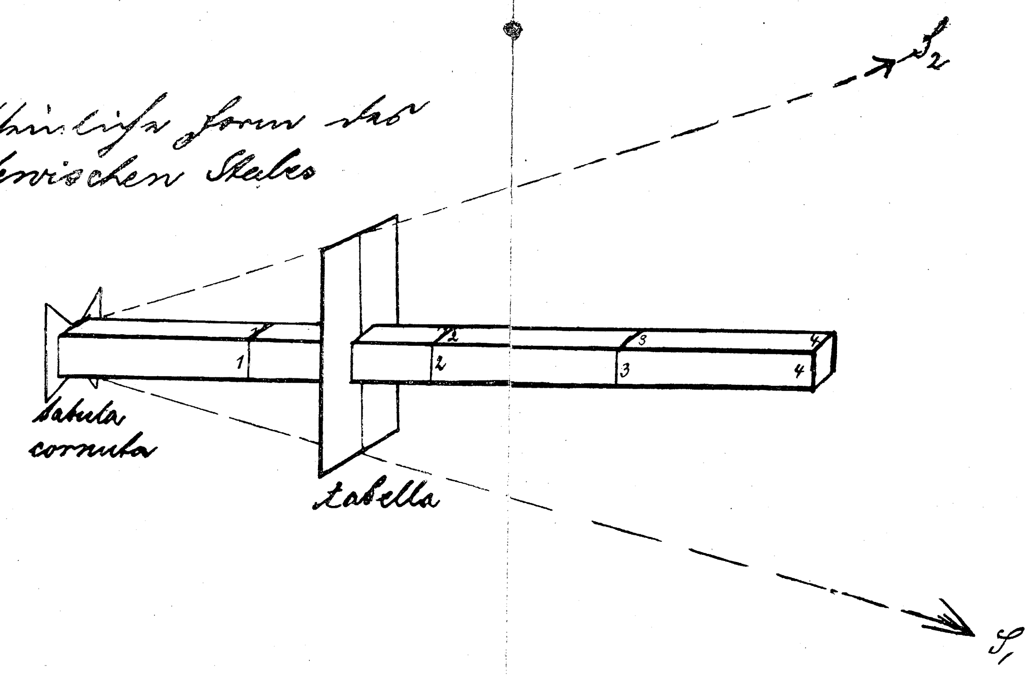
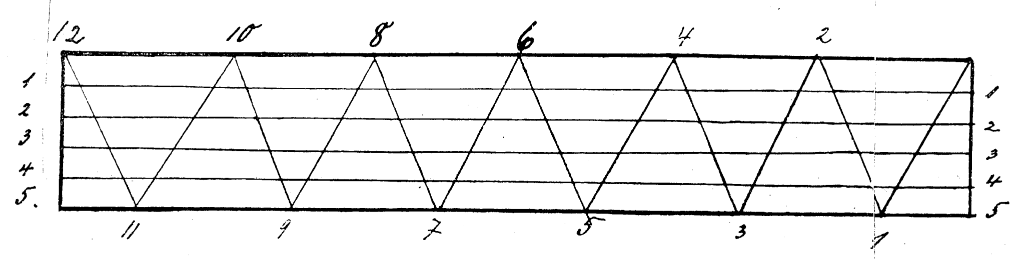


Fig. 2.

Wahrscheinliche Form des Lewischen Stabes

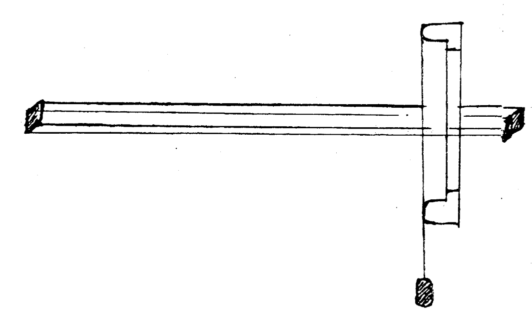


Figur 3. Prinzip des verjüngten Maßstabes

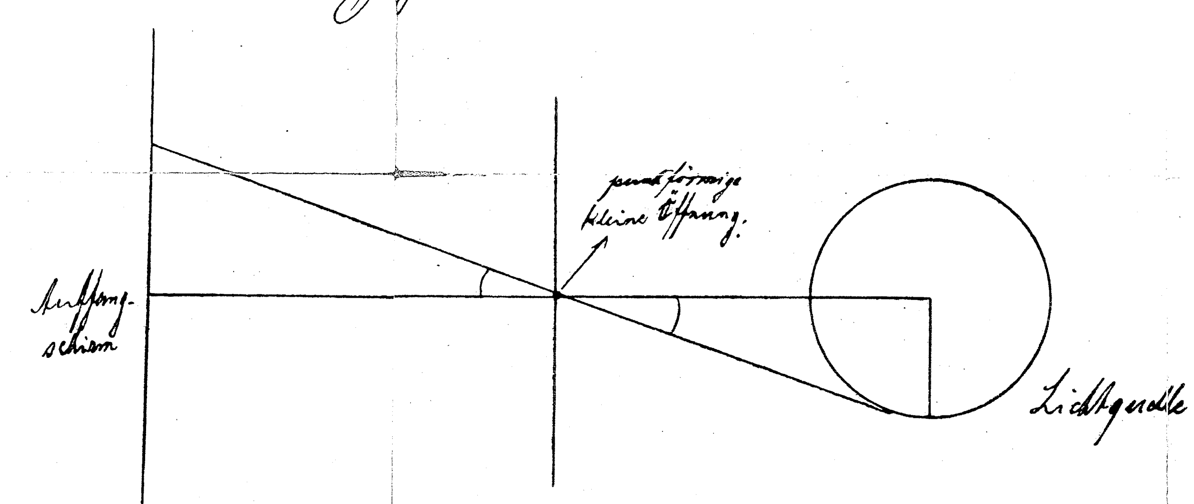


Figur 4. Anwendung des Jakobstabs mit Senkel.

(Nach Gemma Frisius 1544. Vergl. Schück l. c. S 125)



Figur 5



TAFEL 1.

Fig. 1.

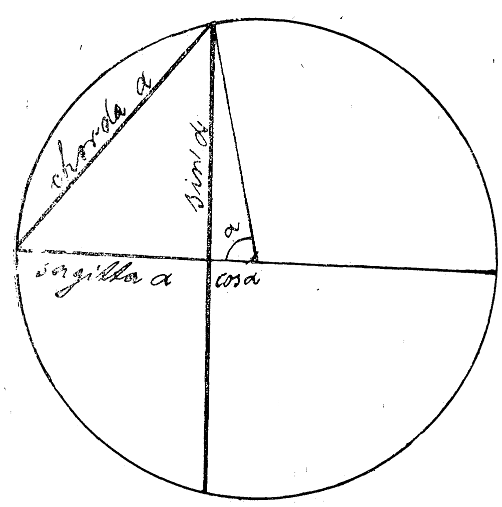


Fig. 3.

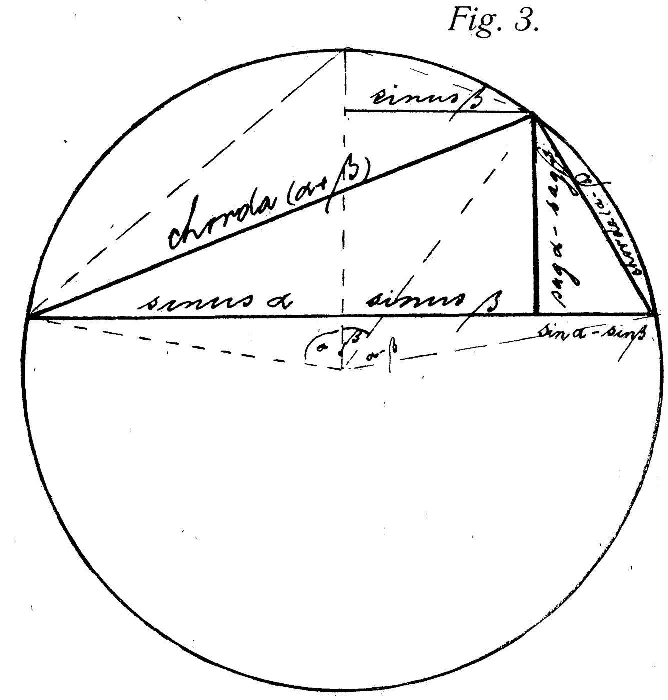


Fig. 2.

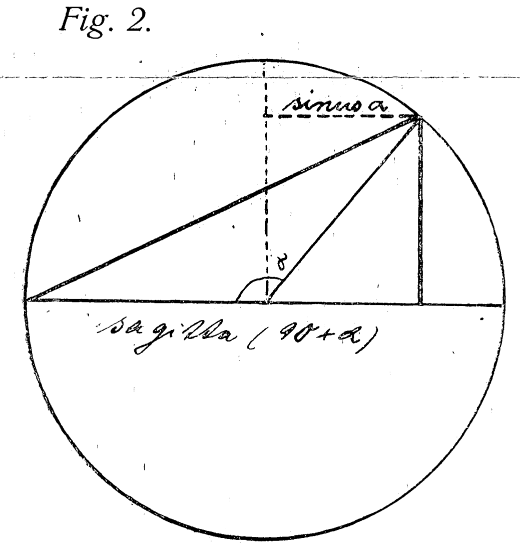


Fig. 4.

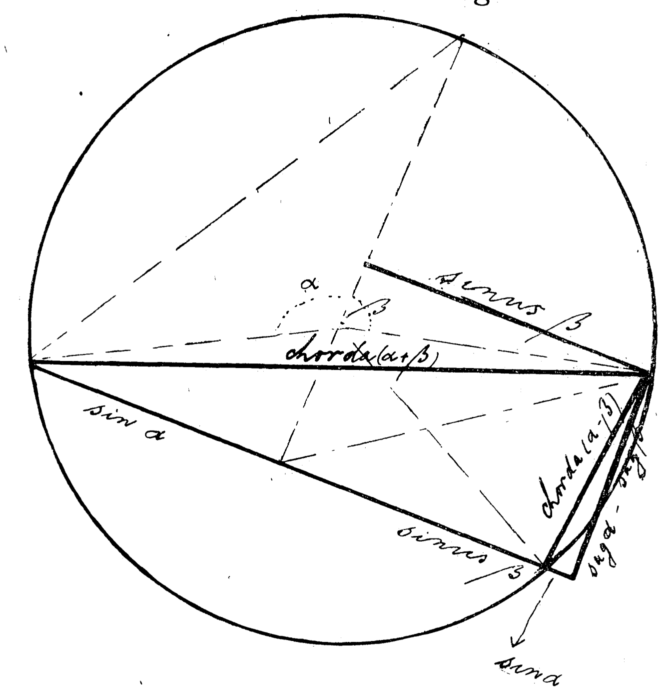
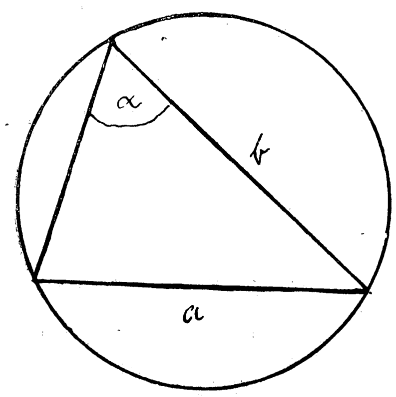
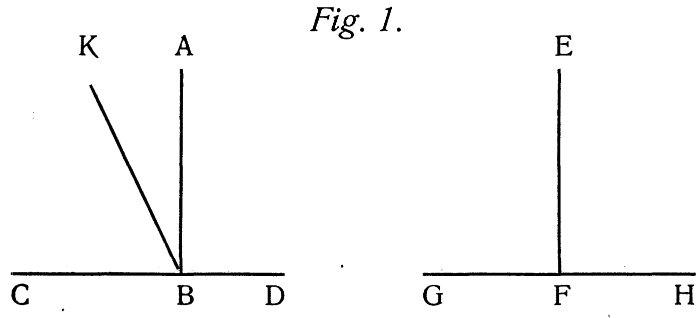


Fig. 5.



TAFEL 2.

Fig. 1.



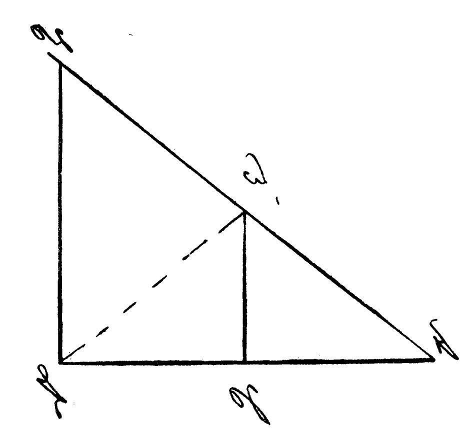
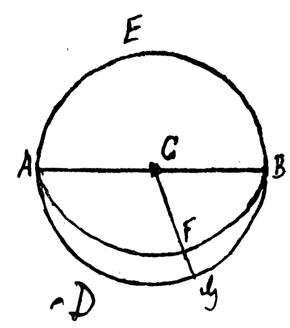


Fig. 5.

Fig. 2.



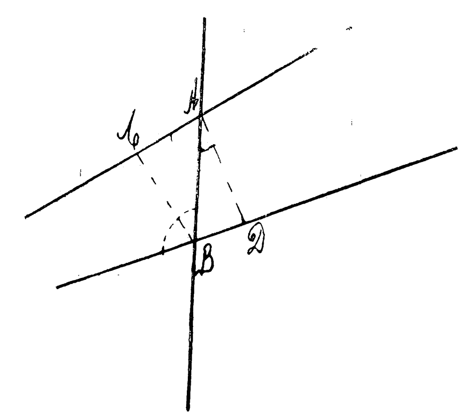


Fig. 6.

Fig. 3.

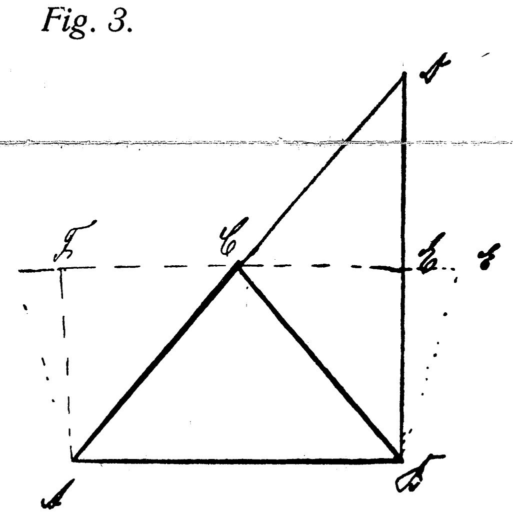


Fig. 7.

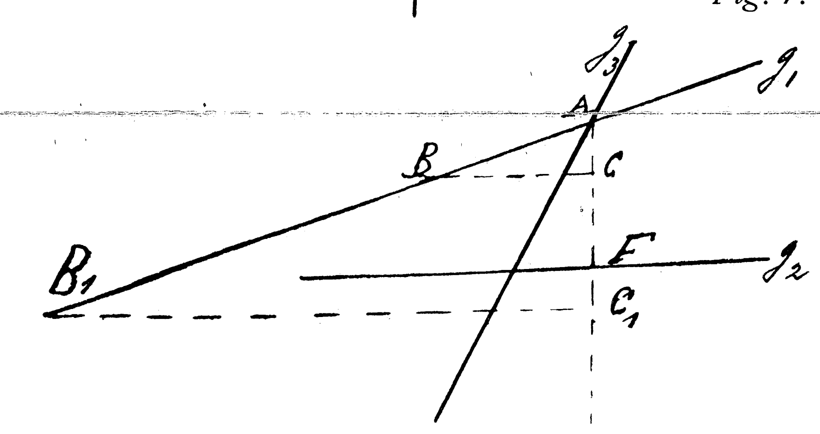
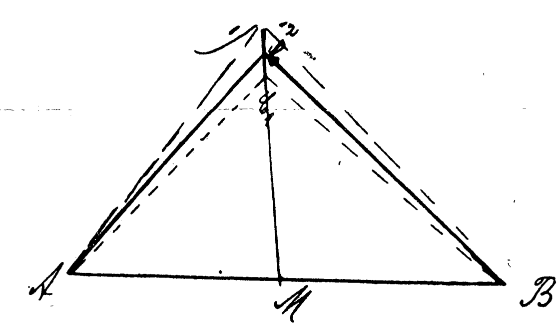


Fig. 4.



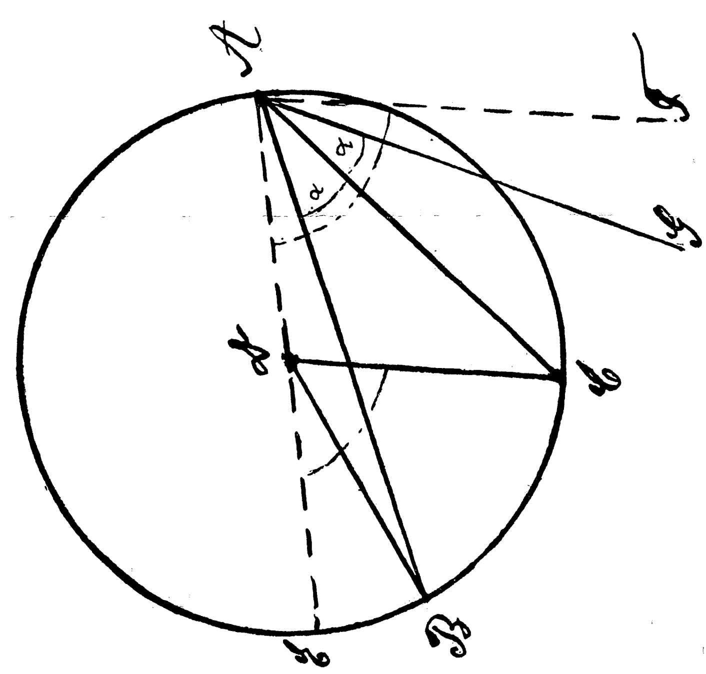


Fig. 8.

TAFEL 3.